Univerzitet u Kragujevcu
Tehnički fakultet u Čačku

Katedra za matematiku

Zbirka zadataka za prijemni ispit iz

MATEMATIKE

Čačak, 2009.

Autori: Mr Nada Damljanović
Mr Rale Nikolić

Recenzenti: Prof. dr Mališa Žižović
Prof. dr Dragan Đurčić

Izdavač: Tehnički fakultet u Čačku

Štampa: Štamparija Tehničkog fakulteta u Čačku

Tiraž: 300 primeraka

LaTeX: Mr Nada Damljanović
Mr Rale Nikolić
Mladen Janjić

Predgovor

Ova zbirka zadataka namenjena je kandidatima za pripremanje prijemnog ispita iz matematike na Tehničkom fakultetu u Čačku. Zadaci za prijemni ispit iz matematike za generaciju studenata 2009/2010 će biti odabrani iz ove zbirke. Takođe, ova zbirka obuhvata osnovne sadržaje matematike iz srednjoškolskog obrazovanja potrebne za izvođenje nastave matematike u toku studija na Tehničkom fakultetu i zato će biti potreban materijal za sve buduće studente istoimenog fakulteta.

Autori su veoma zahvalni recenzentima Prof. dr Mališi Žižoviću i Prof. dr Draganu Đurčiću, profesorima Tehničkog fakulteta u Čačku, koji su pažljivo i detaljno pregledali rukopis, i svojim sugestijama i komentarima dali značajan doprinos poboljšanju prvobitne verzije teksta. Takođe, autori će biti zahvalni svakom ko doprinese da se iz ovog rukopisa otklone nedostaci, kojih kao i kod svakog izdanja neke knjige, sigurno ima.

Čačak, Februar 2009. god. Autori

Sadržaj

Glava 1

Algebarski izrazi

1.1 Polinomi–rastavljanje na činioce

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{1.1}$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{1.2}$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{1.3}$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{1.4}$$
$$a^n \pm b^n = (a \pm b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b + \cdots \mp ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{1.5}$$

gde se u slučaju zbira pretpostavlja da je n neparan prirodan broj.

Specijalno je

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1), \qquad n \in N \tag{1.6}$$
$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \pm \cdots + (-1)^n b^n. \tag{1.7}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, gde su x_1 i x_2 nule datog polinoma. Uopšte, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1.8}$$

tada je

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{1.9}$$

Ako je $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, tada je $Q(x)$ količnik, a $R(x)$ ostatak deljenja polinoma $P(x)$ polinomom $D(x)$.

Bezuov stav: Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $(x - a)$ je $R = P(a)$. Specijalno, ako je $P(a) = 0$, tada je $P(x)$ deljivo sa $(x - a)$ i $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Hornerova šema: Neka je $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, gde je $a_0 \neq 0$, dati polinom koji pri deljenju polinomom $(x - a)$ daje količnik $Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ i ostatak R, tj. neka je

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - a) + R.$$

Za određivanje koeficijenata $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ koristimo sledeću šemu:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 = a_0 & b_1 = a_1 + b_0 & \cdots & b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot a & R = a_n + b_{n-1} \cdot a \end{array}$$

Zadaci

1.1 Proveriti da li važi identitet:

a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

b) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$.

1.2 Koristeći se grupisanjem članova, rastaviti na činioce sledeće polinome:

a) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$; b) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$;

c) $m^2x^4 - mnx^3 + 2mx^2 - 2nx - n + mx$.

Rezultat: a) $(a + b)(3x - 4y)$; b) $(a - b)(x^2 - x - 1)$;

c) $(mx - n)(mx^3 + 2x + 1)$.

1.3 Koristeći se pravilom za razliku kvadrata, rastaviti na činioce polinome:

a) $1 - 25x^2$; b) $\frac{4}{9}x^2y^4 - z^2$; c) $81x^4 - y^4$.

Rezultat: a) $(1-5x)(1+5x)$; b) $(\frac{3}{2}xy^2 - z)(\frac{3}{2}xy^2 + z)$;

c) $(3x-y)(3x+y)(9x^2+y^2)$.

1.4 Sledeće polinome rastaviti na činioce koristeći se formulom za kvadriranje i kubiranje binoma:

a) $9x^2+6x+1$; b) $12ab-9a^2-4b^2$;

c) $a^3-12a^2b+48ab^2-64b^3$; d) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$.

Rezultat: a) $(3x+1)^2$; b) $-(3a-2b)^2$; c) $(a-4b)^3$; d) $(x+2y)^3$.

1.5 Rastaviti na činioce kvadratne trinome koji nisu kvadrati binoma:

a) x^2+5x+6; b) $a^2-2ax-15x^2$; c) $x^2+3xy-28y^2$.

Rezultat: a) $(x+2)(x+3)$; b) $(a-5x)(a+3x)$; c) $(x-4y)(x+7y)$.

1.6 Koristeći se pravilima za razliku i zbir kubova, rastaviti na činioce:

a) $125x^3+8$; b) $(a+b)^3-a^3$; c) x^6-64.

Rezultat: a) $(5x+2)(25x^2-10x+4)$; b) $b(3a^2+3ab+b^2)$;

c) $(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$.

1.7 Rastaviti na činioce polinome:

a) a^4+4; b) $x^4+x^2y^2+y^4$; c) x^8+x^4+1.

Rezultat: a) $(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$;

b) $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$;

c) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$.

1.8 Rastaviti na činioce polinome:

a) x^3-3x+2; b) x^3+2x^2-3; c) x^3+x^2+4.

Rezultat: a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x-1)(x^2+3x+3)$;

c) $(x+2)(x^2-x+2)$.

1.9 Podeliti polinome:

a) $(x^4 + 2x^2 + 5x - 14) : (x + 2)$;

b) $(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5) : (x - 3)$;

c) $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 23x - 30) : (x^2 + x - 6)$.

Rezultat: a) $x^3 - 2x^2 + 6x - 7$;

b) $2x^3 + 3x^2 + 12x + 32$ i ostatak 91;

c) $x^2 - 3x + 5$.

1.10 Odrediti a i b tako da:

a) polinom $(x^3 + ax^2 + bx - 5)$ bude deljiv sa $x^2 + x + 1$;

b) polinom $(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + ax + b)$ bude deljiv sa $x^2 - 5x + 1$.

Rezultat: a) $a = b = -4$; b) $a = -2$, $b = 1$.

1.11 Rastaviti na činioce:

a) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;

b) $P(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$;

c) $P(x) = 2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5$;

d) $P(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6$.

Rezultat:

a) $(x-1)(x+3)(x+7)$; b) $(x-3)^2(x+5)$;

c) $(x-1)^3(2x+5)$; d) $(x-1)(x-2)(x-3)(2x-1)$.

1.12 Za koje vrednosti realnih parametara a, b, c je polinom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ deljiv binomima $x - 1$, $x + 2$, $x - 3$?

Rezultat: $a = -2$, $b = -5$, $c = 6$.

1.13 Odrediti p i q tako da polinom $P(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ bude deljiv sa $x^2 - 3x - 4$.

Rezultat: $p = q = -\frac{13}{4}$.

1.14 Neki polinom pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 2, a pri deljenju sa $x-2$ daje ostatak 1. Koliki ostatak daje ovaj polinom pri deljenju sa $(x-1)(x-2)$?

Rezultat: $-x+3$.

1.15 Proveriti da li važi identitet:

a) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$;

b) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(a-c)(b-c)$;

c) $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$.

1.2 Brojevni, racionalni i iracionalni algebarski izrazi

Skraćivanje razlomaka:

$$\frac{A(x)D(x)}{B(x)D(x)}=\frac{A(x)}{B(x)},\qquad \text{gde je } D(x)\neq 0.$$

Množenje i deljenje razlomaka:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\qquad \text{i}\qquad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

Dvojni razlomci:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

Osobine stepena: Za proizvoljne x, y i za pozitivne vrednosti a i b važe jednakosti:

- $a^0=1$;
- $a^xa^y=a^{x+y}$;
- $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
- $(a^x)^y=a^{xy}$;
- $(ab)^x=a^xa^y$;
- $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$;
- $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$.

Svojstva aritmetičkih vrednosti korena: Za bilo koje vrednosti prirodnih brojeva k, n i za ma koje vrednosti nenegativnih brojeva a i b važe jednakosti:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b \neq 0)$;
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;
- $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$;
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$;
- $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- $a < b \Longrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;
- $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

Za proizvoljne realne vrednosti broja a važi:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{kada je } a \geq 0 \\ -a, & \text{kada je } a < 0 \end{cases}$$

odnosno, opštije: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Racionalisanje imenioca: Neka su a i b pozitivni brojevi takvi da je $b \neq a \neq b^2$ i n i k proizvoljni prirodni brojevi

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{b}} &= \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \\
\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} &= \frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b} \\
\frac{1}{b \pm \sqrt{a}} &= \frac{1}{b \pm \sqrt{a}} \cdot \frac{b \mp \sqrt{a}}{b \mp \sqrt{a}} = \frac{b \mp \sqrt{a}}{b^2 - a} \\
\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \\
\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}
\end{aligned}$$

Lagranžovi identiteti:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Zadaci

1.16 Izračunati: a) $\left(\frac{5}{3}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right)^{-1}:\left(2^{-4}\cdot 0{,}1^{-4}\right)+2^{-4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

b) $\left(\frac{2^{-2}+5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{0}}{3-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}-2\right):\frac{3^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$.

Rezultat: a) 1; b) 9.

1.17 Izračunati: a) $\frac{\left((-12)^{-8}\right)^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^{4}\cdot 18^{6}\cdot 10^{4}}$;

b) $\frac{5^{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}{10^{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}}$.

Rezultat: a) -10000; b) 200.

1.18 Izračunati: a) $\frac{3\frac{3}{4}:7\frac{1}{2}-5{,}25:10\frac{1}{2}}{\left(2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}-1:\frac{2}{3}\right):1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:2}$; b) $1{,}7:\frac{\left(4{,}5\cdot\frac{5}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{34}{405}}{\frac{5}{9}}$;

c) $\frac{\left(7\frac{37}{72}-5\frac{43}{96}\right):1\frac{11}{24}+\left(15{,}9-13\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}{\left(\frac{3}{4}\cdot 0{,}4+24{,}15:2{,}3-10\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{16}}$.

Rezultat: a) 0; b) 1; c) $\frac{81}{3}$.

1.19 Naći broj čijih je 7,5% jednako vrednosti izraza

$$\frac{\left(8\frac{7}{55}-6\frac{17}{110}\right)\cdot 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{20}\right):1\frac{7}{8}}.$$

Rezultat: 200.

1.20 Izračunati:

a) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\right]^{-\frac{1}{2}}$; b) $\left[\left(-1{,}4-\frac{3}{5}\right)^{2}:\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{3}}$;

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+81^{0{,}25}-8^{-1\frac{1}{3}}+(0{,}65)^{0}-\left(1\frac{1}{15}\right)^{-1}$;

d) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}}\cdot\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{4}\cdot 0{,}75-0{,}75\cdot\frac{1}{9}}\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right):\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}}{0{,}75\cdot\frac{1}{3}}$.

Rezultat: a) $\frac{4}{11}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 11; d) $\frac{6}{5}$.

1.21 Izračunati vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$$

za $a=0{,}003$ i $b=5{,}994$.

Rezultat: 2.

1.22 Proveriti da li važi identitet:

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}+\frac{x}{1-x}-1=-\frac{1}{x}, \quad (x\neq 0,1).$$

1.23 Proveriti da li važi identitet:

$$1-\frac{8}{a^2-4}\left[\left(1-\frac{a^2+4}{4a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{a-2}{a+2}, \quad (a\neq 0,\pm 2)$$

1.24 Proveriti da li važi identitet:

$$\frac{1}{a^2+2a+1}-\frac{a^2+a}{a^3-1}\cdot\left(\frac{1}{a^2-a}-\frac{a}{1-a^2}\right)=-\frac{4a}{a^4-2a^2+1}, \ (a\neq\pm 1)$$

1.25 Proveriti da li važi identitet:

$$\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)=\frac{b}{6b-4a}, \qquad (a\neq\pm\frac{3}{2}b)$$

1.26 Racionalisati imenioce sledećih razlomaka:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{5}-3}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; d) $\frac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$;

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$.

Rezultat: a) $2\sqrt{3}$; b) $-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

d) $2(\sqrt[3]{121}-\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25})$ e) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$;

f) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(4+2\sqrt{9}+3\sqrt[3]{3})$.

1.27 Dokazati da je:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

1.28 Izračunati vrednost izraza:

$$\left(\frac{3x+2\sqrt{x}}{4-9x}+\frac{x\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2-3\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2+3\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$$

za $x=\frac{2}{3}$.

Rezultat: $\frac{3}{2}$.

1.29 Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right).$$

Rezultat: -1.

1.30 Izračunati vrednost izraza:

$$A=\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(ab)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^{-2}.$$

za $a=27$ i $b=8$.

Rezultat: 1.

1.3 Neke nejednakosti sa algebarskim izrazima

Zadaci

1.31 Dokazati da za pozitivne a i b važi:

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

1.32 Dokazati da za pozitivne a i b važi:

a) $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}$; b) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$;

c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}$.

1.33 Dokazati da za pozitivne brojeve a i b važe nejednakosti:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; b) $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Utvrditi kada važi znak jednakosti.

1.34 Ako je $ab < 0$, dokazati $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$.

1.35 Dokazati da za pozitivne brojeve a, b i c važe nejednakosti:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Glava 2

Linearne funkcije, jednačine i nejednačine

Jednačina (sa jednom nepoznatom x) koja je ekvivalentna jednačini oblika

$$a \cdot x + b = 0, \tag{2.1}$$

gde su a i b dati realni brojevi, naziva se *linearna jednačina*. Ako je $a \neq 0$, jednačina (2.1) ima jedinstveno rešenje $x = -\frac{b}{a}$. Ako je $a = 0$ i $b \neq 0$, jednačina (2.1) nema rešenja, dok u slučaju da je $a = 0$ i $b = 0$ svaki realan broj x je njeno rešenje.

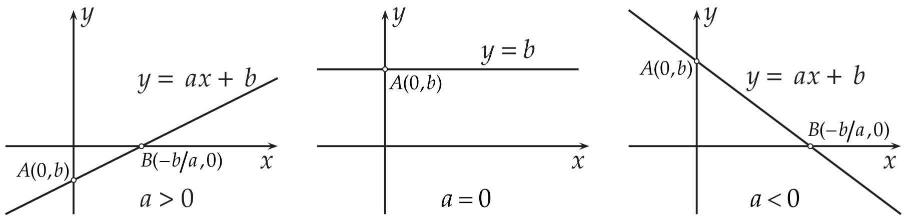
Nejednačina oblika

$$a \cdot x + b > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

za $a > 0$ je zadovoljena za svaki realan broj x takav da je $x > -\frac{b}{a}$, a za $a < 0$ je zadovoljena za svaki realan broj x takav da je $x < -\frac{b}{a}$. U slučaju da je $a = 0$ i $b > 0$ jednačina (2.2) je zadovoljena za svaki realan broj x, dok u slučaju da je $a = 0$ i $b \leq 0$ nema rešenja.

Funkcija $y = ax + b$, $(a, b \in R)$ jeste *linearna funkcija*. Grafik linearne funkcije je prava. Tačka $A(0, b)$ je tačka preseka prave (grafika linearne funkcije) i Oy-ose. U slučaju da je $a \neq 0$ tačka $B(-\frac{b}{a}, 0)$ je njen presek sa Ox-osom. Za $a > 0$ prava-grafik zaklapa oštar ugao sa pozitivnim smerom Ox-ose, za $a = 0$ $(y = b)$ prava-grafik je paralelna sa Ox-osom, dok za $a < 0$ prava-grafik zaklapa tup ugao sa pozitivnim smerom Ox-ose.

Jednačinom $y = ax + b$ nisu obuhvaćene samo prave koje su paralelne Oy-osi (čije su jednačine $x = x_0$).



Zadaci

2.1 Rešiti sledeće jednačine:

a) $5(x-1) - 4(x-3) = -20$;

b) $10x - 2(25-3x) - 3 = 8(2x-6) - 5$;

c) $(5x-1)^2 - 5(2x+4)(2x-4) = 1 + 5(x-1)^2$.

Rezultat: a) $x = -27$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) nemoguća.

2.2 Rešiti jednačine:

a) $1 - \frac{2x-5}{6} = \frac{3-x}{4}$; b) $14\frac{1}{2} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{3x}{2} - \frac{2(x-7)}{3}$;

c) $\frac{2x-5}{6} + \frac{x+2}{4} = \frac{5-2x}{3} - \frac{6-7x}{4} - x$.

Rezultat: a) $x = 13$; b) $x = 7$; c) $x = 1$

2.3 Rešiti jednačinu:

$$\frac{1 - \frac{6-x}{3}}{2} + x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3+x}{4}}{2} = 3.$$

Rezultat: $x = 3$.

2.4 Rešiti jednačinu $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$.

Rezultat: $x = 3$

2.5 Rešiti jednačinu $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$.

Rezultat: $x = -1$.

2.6 Rešiti jednačinu $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$.

Rezultat: Nema rešenja.

2.7 Rešiti sledeće jednačine, vodeći računa o definiciji apsolutne vrednosti:

a) $|x| + 1 = 5$; b) $2|x| - 1 = |x| + 7$;

c) $|5x - 2| + x = 10$; d) $|x| - x = 0$.

Rezultat: a) $x = \pm 4$; b) $x = \pm 8$; c) $x = \pm 2$; d) $x \geq 0$.

2.8 Rešiti sledeće jednačine, vodeći računa o definiciji apsolutne vrednosti:

a) $|x + 1| - |x - 1| = 0$; b) $|x - 4| - |2x + 3| = 2$;

c) $|1 - x| - |x - 2| = |x - 3|$.

Rezultat: a) $x = 0$; b) $x = -5$ ili $x = -\frac{1}{3}$; c) $x = 2$ ili $x = 4$.

2.9 Rešiti nejednačine:

a) $2x - 4 < 0$; b) $-3x + 9 > 0$; c) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x-2}{5} > 2$.

Rezultat: a) $x < 2$; b) $x < 3$; c) $x > \frac{37}{7}$.

2.10 Rešiti nejednačine:

a) $(x - 2)(x + 3) + (x + 4)^2 \geq 2x(x + 4) + x$;

b) $\frac{x+4}{2} - \frac{x+6}{3} < 1 + \frac{2x+9}{3} - \frac{x+6}{2}$.

Rezultat: a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \mathbb{R}$.

2.11 Rešiti nejednačine:

a) $\frac{1}{3}x - \frac{x-2}{2} > \frac{x+2}{2} - \frac{2x-6}{3}$; b) $\frac{x-1}{3} - 1 + x \geq \frac{8-x}{6} + \frac{3x-2}{2}$.

Rezultat: a) nema rešenja; b) nema rešenja.

2.12 Rešiti sledeće nejednačine, vodeći računa o definiciji apsolutne vrednosti:

a) $|x-1|>2$; b) $|x+2|>|x|$; c) $x-|x|>1$;

d) $|x+3|-|x+1|<2$; e) $||x|-2|\leq 1$.

Rezultat: a) $x<-1$ ili $x>3$; b) $x>-1$; c) nema rešenja;

d) $x<-1$; e) $-3\leq x\leq -1$ ili $1\leq x\leq 3$.

2.13 Koristeći ekvivalencije:

$$A\cdot B>0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad A>0 \text{ i } B>0 \quad \text{ili} \quad A<0,\ B<0;$$
$$A\cdot B<0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad A>0 \text{ i } B<0 \quad \text{ili} \quad A<0,\ B>0.$$

rešiti sledeće nejednačine:

a) $(x-2)(x+3)>0$; b) $(2x-1)(4-x)<0$;

c) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{9}<0$; d) $(x-1)(x-2)^2>0$.

Rezultat: a) $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$; b) $x\in(\infty,\frac{1}{2})\cup(4,+\infty)$;

c) $x\in(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$; d) $x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$.

2.14 Koristeći se činjenicom da je znak količnika $\frac{A}{B}$, $B\neq 0$, jednak znaku proizvoda $A\cdot B$, rešiti sledeće nejednačine:

a) $\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}>\frac{9-x}{x^2+3x}$; b) $\frac{2-x}{x+1}+\frac{x+2}{x-1}<\frac{7x-x^3}{x^2-1}$;

c) $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}>\frac{3(x+3)^2-x(9+2x^2)}{3x^2+9x}$; d) $\frac{4}{4x^2-9}+\frac{x}{2x-3}<\frac{1}{2x^2+3x}$;

e) $\frac{4x}{9x^2-4}+\frac{x}{3x+2}+\frac{1}{3x^2-2x}>0$; f) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\leq\frac{x^2-2}{x^2+x}$.

Rezultat:

a) $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$; b) $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$;

c) $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$; d) $x\in(0,\frac{3}{2})$;

e) $x\in(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3},0)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$;

f) $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup[3,+\infty)$.

2.15 Rešiti jednačine:

a) $\frac{x^2+10x+25}{3x^2+1}\geq 0$ b) $\frac{x^2+5x}{x-2}>0$.

Rezultat: a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in (-5,0) \cup (2,+\infty)$.

2.16 Zbir dva broja je 45, a njihov količnik jednak je 7 : 8. Odrediti ove brojeve.

Rezultat: 21 i 24.

2.17 Zbir dva broja je 47. Ako veći podelimo manjim, dobija se količnik 2, a ostatak je 5. Koji su to brojevi?

Rezultat: 14 i 33.

2.18 Cifra jedinica jednog dvocifrenog broja je za 3 veća od cifre desetica. Ako podelimo taj broj zbirom cifara, dobija se količnik 3, a ostatak je 4. Odrediti taj broj.

Rezultat: 25.

2.19 Razlika dva broja je 13,86. Ako većem broju premestimo decimalni zarez za jedno mesto ulevo, dobije se manji broj. Odrediti ove brojeve.

Rezultat: 15,4 i 1,54.

2.20 Za odličan plasman na takmičenju iz matematike nagrađena su četiri učenika nagradom od 36000 dinara. Koliko dobije svaki učenik ako se nagrada deli u razmeri 1,5 : 2 : 2,5 : 3?

Rezultat: 6000, 8000, 10000 i 12000.

2.21 Razlika, zbir i proizvod dva broja odnose se kao 1 : 3 : 6. Odrediti ove brojeve.

Rezultat: 6 i 3.

2.22 Ako se uveća brojilac jednog razlomka za 1, a imenilac za 3, dobija se razlomak $\frac{2}{3}$, a ako se oduzme 5 od imenioca i brojioca razlomka, dobije se $\frac{1}{2}$. Odrediti razlomak.

Rezultat: $\frac{7}{9}$.

2.23 Površina jednog pravougaonika je za 125 cm^2 veća od površine kvadrata nad manjom stranicom. Odrediti stranice pravougaonika ako se razlikuju za 5 cm.

Rezultat: 25 i 30.

2.24 U jednačini $\frac{a-2x}{a} - \frac{2-ax}{2} = a - 2$, odrediti realan broj a tako da rešenje po x bude veće od -2.

Rezultat: $a \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

2.25 Odrediti m tako da rešenje jednačine $\frac{3}{x} = \frac{2m-1}{x+m}$ bude veće od 1.

Rezultat: $m < -4$ ili $m > 2$.

Glava 3

Kvadratne jednačine, funkcije i nejednačine. Sistemi kvadratnih jednačina

3.1 Kvadratne jednačine

Jednačina oblika $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c \in R, a \neq 0)$ je *kvadratna jednačina*, gde je $D = b^2 - 4ac$ *diskriminanta* te jednačine. Rešenja kvadratne jednačine u skupu $\mathbb{C}$ su za:

1. $D > 0$ realna i različita: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

2. $D = 0$ realna i jednaka: $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$,

3. $D < 0$ konjugovano-kompleksna: $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}$,

i važi $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Vijetove formule: Neka su x_1, x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, tada je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Specijalno, ako su x_1, x_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2 + px + q = 0$, tada je $x_1 + x_2 = -p$ i $x_1 \cdot x_2 = q$.

Zadaci

3.1 Rešiti sledeće kvadratne jednačine:

a) $4x^2 - 9 = 0$; b) $5x^2 + 180 = 0$; c) $3x^2 - 5x$;

d) $\sqrt{2}x^2 + 2x = 0$.

Rezultat: a) $x = \pm\frac{3}{2}$; b) $x = \pm 6i$; c) $x = 0$ ili $x = \frac{5}{3}$ d) $x = 0$ ili $x = -\sqrt{2}$.

3.2 Rešiti sledeće kvadratne jednačine:

a) $\frac{3x^2-1}{2} + \frac{2x+1}{3} = \frac{x^2-2}{4} + \frac{1}{3}$; b) $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3(x-1)}{8} - \frac{x+11}{24}$;

c) $\frac{5-x}{5+x} + \frac{5+x}{5-x} = \frac{100}{25-x^2}$; d) $\frac{34}{4x^2-1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$.

Rezultat: a) $x = 0$ ili $x = -\frac{8}{15}$; b) $x = \pm i$; c) nema rešenja; d) $x = \pm 2$.

3.3 Koristeći ekvivalenciju $A \cdot B = 0 \iff A = 0 \vee B = 0$ odrediti rešenja jednačine:

a) $(1-x)(4\sqrt{2} - 2x) = 0$; b) $(x+1)^2 - 25 = 0$;

c) $(3x+4)^2 + 25 = 0$.

Rezultat: a) $x = 1$ ili $x = 2\sqrt{2}$; b) $x = 4$ ili $x = -6$; c) $x = \frac{-4\pm 5i}{3}$.

3.4 Rešiti jednačine:

a) $(2x-3)^2 + (2x-5)^2 = 4(x-3)^2 + 30$;

b) $\frac{x+1}{3} + \frac{3(x-1)}{4} = (x-3)^2 + 1$.

Rezultat: a) $x = -2$ ili $x = 4$; b) $x = \frac{25}{12}$ ili $x = 5$.

3.5 Rešiti jednačine:

a) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$; b) $\frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x^2-9}$;

c) $\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$.

Rezultat: a) $x = -\frac{5}{4}$ ili $x = 1$; b) $x = 1$ ili $x = 12$; c) $x = -13$ ili $x = -5$.

3.6 Rešiti jednačinu $(a^2 - b^2)x^2 + 2ax + 1 = 0$.

Rezultat: $x = -\frac{1}{a+b}$ ili $x = -\frac{1}{a-b}$.

3.7 Rešiti jednačine:

a) $2x^2 - 5x - 3|x - 2| = 0$; b) $|x^2 + 2x| - |3 - x| = x^2$.

Rezultat: a) $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ili $x = 3$; b) $x = 1$.

3.8 Za koje vrednosti realnog parametra m su rešenja jednačine

$$(m + 2)x^2 + 4x - 1 = 0.$$

a) realna i različita; b) realna i jednaka; c) konjugovano-kompleksna.

Rezultat: a) $m > -6$; b) $m = -6$; c) $m < -6$.

3.9 Odrediti realne brojeve a za koje kvadratna jednačina $(a+5)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$ nema realnih rešenja.

Rezultat: $a > -\frac{5}{6}$.

3.10 a) Sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rešenja $x_1 = -7$ i $x_2 = -3$.

b) Sastaviti kvadratnu jednačinu sa racionalnim koeficijentima koja ima jedno rešenje $x_1 = 2 + \sqrt{3}$.

c) Sastaviti kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima koja ima jedno rešenje $x_1 = 2 - 3i$.

Rezultat: a) $x^2 + 10x + 21 = 0$; b) $x^2 - 4x + 1$; c) $x^2 - 4x + 13$.

3.11 Data je jednačina $3x^2 - x - 7 = 0$ čija su rešenja x_1 i x_2. Ne rešavajući ovu jednačinu odrediti numeričke vrednosti izraza:

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 \cdot x_2^3$; c) $x_1^3 + x_2^3$.

Rezultat: a) $\frac{43}{9}$; b) -$\frac{343}{27}$; c) $\frac{64}{27}$.

3.12 Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine $x^2 + px + 2p^2 = 0$, $(p \neq 0)$. Ne rešavajući jednačinu izračunati $x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$.

Rezultat: $5p^4$.

3.13 Odrediti vrednost parametra k u jednačini $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ tako da je jedan koren jednak polovini drugog.

Rezultat: $k = 4$.

3.14 Koji brojevi p i q treba da budu koeficijenti kvadratne jednačine $x^2 + px + q$ da bi njeni koreni bili takodje p i q?

Rezultat: $p = 0, q = 0$ ili $p = 1, q = -2$.

3.15 Odrediti parametar a tako da jedan koren jednačine $(a+5)x^2 - 3ax + 2a - 1 = 0$ bude dva puta veći od drugog.

Rezultat: $a = \frac{5}{9}$.

3.16 Rešiti jednačinu $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

Rezultat: $x = \pm\sqrt{3}$ ili $x = \pm 1$.

3.17 Rešiti jednačine:

a) $(x^2+2)^2 + (x^2-3)^2 = 625$; b) $(\frac{2x^2-1}{x})^2 - 4(\frac{2x^2-1}{x}) + 3 = 0$.

Rezultat: a) $x = \pm 3\sqrt{2}$ ili $x = \pm i\sqrt{17}$; b) $x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ ili $x = 1$ ili $x = -\frac{1}{2}$.

3.18 Rešiti jednačinu $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{3}{2}$.

Rezultat: $x = \pm\sqrt{2}$ ili $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.19 Rešiti jednačinu $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

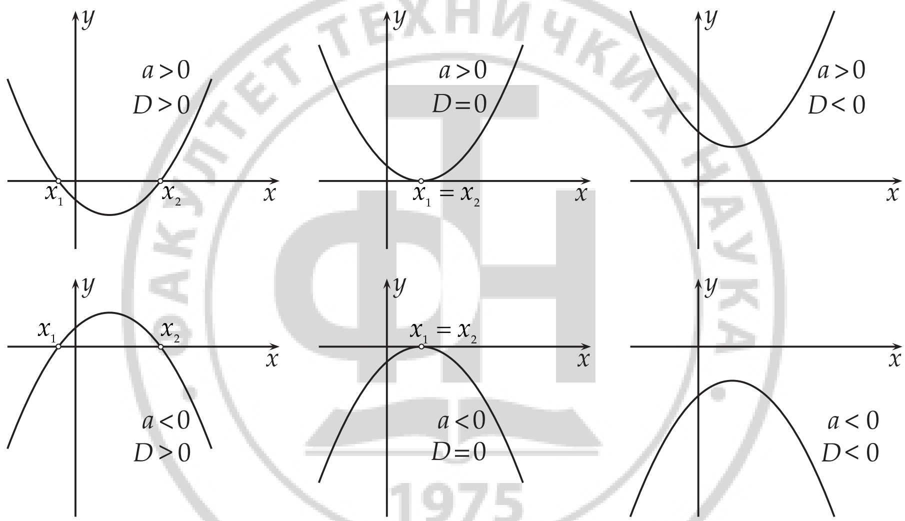
Rezultat: $x = 2 \pm \sqrt{3}$ ili $x = \frac{1}{2}$ ili $x = 2$.

3.20 Rešiti jednačinu $x(x+1)(x+3)(x+4) = 4$.

Rezultat: $x = -2$ ili $x = -2 \pm \sqrt{5}$.

3.2 Kvadratna funkcija

Funkcija $y = ax^2 + bx + c$, $(a,b,c \in R, a \neq 0)$ naziva se *kvadratna funkcija*. *Kanonski oblik* kvadratne funkcije je $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$, gde je $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Grafik kvadratne funkcuje je parabola sa temenom $T(\alpha,\beta)$ i osom simetrije $x = \alpha$. Ako je $a > 0$ $(a < 0)$ parabola je okrenuta na gore (na dole) i u tački $x = \alpha$ funkcija $y = ax^2 + bx + c$ ima minimum (maximum). Za $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ parabola seče Ox-osu u dve, jednoj, nijednoj tački, respektivno.



Zadaci

3.21 Svesti sledeće kvadratne funkcije na kanonski oblik:

a) $y = x^2 - 2x - 1$; b) $y = x^2 - 8x + 16$; c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$.

Rezultat: a) $y = (x-1)^2 - 2$; b) $y = (x-4)^2$;
c) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{25}{2}$.

3.22 Odrediti vrednost koeficijenata a, b, c tako da grafik kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ sadrži tačke $A(-1,2)$, $B(1,-6)$, $C(2,-1)$.

Rezultat: $y = 3x^2 - 4x - 5$.

3.23 Odrediti vrednost realnog parametra k tako da grafik funkcije $y = kx^2 + 2(k+1)x + k + 3$

a) dodiruje Ox-osu; b) seče Ox-osu u dve tačke;

c) nema zajedničkih tačaka sa Ox-osom.

Rezultat: a) $k = 1$; b) $k < 1$; c) $k > 1$.

3.24 Odrediti m tako da prava $y = x + 1$ bude tangenta parabole $y = kx^2 + kx + \frac{1}{4k}(5k + 5)$.

Rezultat: $k = -1$ ili $k = 4$.

3.25 U skupu funkcija $y = (m-1)x^2 + (m-4)x - m - 1$ odrediti m tako da funkcija dostiže najmanju vrednost za $x = 1$.

Rezultat: $m = 2$.

3.26 Razložiti broj 24 na zbir dva sabirka tako da zbir kvadrata tih sabiraka bude minimalan.

Rezultat: $24 = 12 + 12$.

3.27 Odrediti brojnu vrednost realnog parametra a u jednačini $x^2 - ax + a - 1 = 0$ za koju je $x_1^2 + x_2^2$ najmanje (x_1 i x_2 su koreni kvadratne jednačine).

Rezultat: $a = 1$.

3.28 Odrediti stranicu najmanjeg kvadrata koji se može upisati u dati kvadrat stranice 8 cm.

Rezultat: $a = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.

3.29 Od svih pravougaonika datog obima $O = 2p$ naći onaj koji ima najveću površinu.

Rezultat: Kvadrat stranice $\frac{p}{2}$.

3.30 Od svih pravouglih trouglova čiji je zbir dužina kateta jednak s naći onaj koji ima:

a) minimalnu dužinu hipotenuze; b) maksimalnu površinu.

Rezultat: a) $c = \frac{s}{\sqrt{2}}$; b) $a = b = \frac{s}{2}$.

3.3 Kvadratne nejednačine

Znak kvadratnog trinoma $y = ax^2 + bx + c$:

Ako je $a > 0$ i $D > 0$, onda je $y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ i $y < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$.

Ako je $a > 0$ i $D = 0$, onda je $y > 0$ za $x \neq x_1$ i $y < 0$ ni za jedno x.

Ako je $a > 0$ i $D < 0$, onda je $y > 0$ za svako x i $y < 0$ ni za jedno x.

Ako je $a < 0$ i $D > 0$, onda je $y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$ i $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Ako je $a < 0$ i $D = 0$, onda je $y > 0$ ni za jedno x i $y < 0$ za $x \neq x_1$.

Ako je $a < 0$ i $D < 0$, onda je $y > 0$ ni za jedno x i $y < 0$ za svako x.

Zadaci

Rešiti sledeće kvadratne nejednačine:

3.31 a) $4x^2 > 4x - 1$; b) $(3x-2)^2 + (x-2)^2 < 2$.

Rezultat: a) $x \neq \frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5} < x < 1$.

3.32 a) $\frac{4x-x^2}{x^2-x+1} \geq 0$; b) $\frac{x^2-3x+4}{1-x^2} > 0$; c) $\frac{x^2-4x-5}{x^2+2x-3} \leq 0$.

Rezultat: a) $x \in [0,4]$; b) $x \in (-1,1)$; c) $x \in (-3,-1] \cup (1,5]$

3.33 $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$

Rezultat: $x \in (-\infty,1) \cup (\frac{3}{2},2) \cup (3,+\infty)$.

3.34 $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \geq 2$.

Rezultat: $x \in (1,2) \cup (2,4]$.

3.35 $1 < \frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+5} \leq 6$.

Rezultat: $x \in (-\infty, -\frac{24}{5}] \cup [-1, \frac{1}{9})$.

3.36 $1 + \frac{2x}{x+3} + \frac{27}{2x^2+5x-3} > \frac{6x+8}{2x-1}$.

Rezultat: $x \in (-\infty, -3) \cup (0, \frac{1}{2})$.

3.37 $x^2 + 4|x-1| - 4 < 0$.

Rezultat: $x \in (0, -2+2\sqrt{3})$.

3.38 $\frac{x^3+2x^2+2x+1}{6x^2-x-1} \geq 0$.

Rezultat: $x \in [-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

3.39 Za koje vrednosti realnog parametra k nejednačine $-3 < \frac{x^2+kx-2}{x^2+x+1} < 2$ važe za svako realno x?

Rezultat: $-2 < k < 1$.

3.40 Za koje vrednosti realnog parametra k nejednačina

$$(k^2-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 > 0$$

važi za svako realno x?

Rezultat: $k \geq 1$.

3.4 Rešavanje sistema kvadratnih jednačina

Rešiti sledeće sisteme jednačina:

3.41 $x^2 + y^2 + 10x = 0,\ x - y + 6 = 0$.

Rezultat: $(-2,4)$, $(-9,-3)$.

3.42 $\mathrm{x}^2 - 2xy + y^2 + 3x - y = 6,\ 2x - y = 3$.

Rezultat: $(2,1)$, $(3,3)$.

3.43 $xy + x + y = 11,\ x^2y + xy^2 = 30$.

Rezultat: $(5,1)$, $(1,5)$, $(3,2)$, $(2,3)$.

3.44 $(x^2+y^2)(x+y) = 65,\ xy(x+y) = 30$.

Rezultat: $(2,3)$, $(3,2)$.

3.45 $xy(x+y)=30$, $x^3+y^3=35$.

Rezultat: $(2,3)$, $(3,2)$.

Glava 4

Iracionalne jednačine

Iracionalna jednačina je ona jednačina kod koje se nepoznata pojavljuje u nekom izrazu koji je potkorena veličina. Jednačina $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ je

- za neparno n ekvivalentna jednačini $A(x) = B^n(x)$;
- za parno n ekvivalentna je sistemu $A(x) = B^n(x)$ i $B(x) > 0$.

Zadaci

Rešiti sledeće jednačine:

4.1 $\sqrt{3+x} = 3 - x$.

Rezultat: $x = 1$.

4.2 $\sqrt{x^2+3x+6} - 3x + 2 = 0$.

Rezultat: $x = 2$ ili $x = -\frac{1}{8}$.

4.3 $\sqrt{2x^2+1} - 1 + x = 0$.

Rezultat: $x = 0$ ili $x = -2$.

4.4 $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{3-x} = 0$.

Rezultat: $x = 1$ ili $x = 3$.

4.5 $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4.$

Rezultat: $x=\frac{17}{16}.$

4.6 $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

Rezultat: $x=1$ ili $x=-\frac{8}{3}.$

4.7 $\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2.$

Rezultat: $x=1$ ili $x=\frac{49}{9}.$

4.8 $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-4}.$

Rezultat: $x=4.$

4.9 $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}.$

Rezultat: $x=6$ ili $x=8.$

4.10 $\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\frac{21}{x}.$

Rezultat: $x=\pm 21.$

4.11 $x+\sqrt{6+\sqrt{x^2}}=0.$

Rezultat: $x=-3.$

4.12 $\sqrt{y+7+\sqrt{y^2-27}}=2.$

Rezultat: $y=-6.$

4.13 $\sqrt{8-\sqrt{z+1+\sqrt{2z^2+z+3}}}=2.$

Rezultat: $z=-37$ ili $z=6.$

4.14 $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3.$

Rezultat: $x=27$ ili $x=-\frac{1}{8}.$

4.15 $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3.$

Rezultat: $x=-5$ ili $x=2.$

4.16 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$

Rezultat: $x=-2.$

4.17 $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$

Rezultat: $x = 5$ ili $x = -\frac{30}{127}$.

4.18 $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[6]{x} + \sqrt{x} = 2.$

Rezultat: $x = 4$.

4.19 Rešiti sistem jednačina:
$$\begin{aligned} \sqrt{xy} - \sqrt[3]{xy} &= 4 \\ x + y &= 20 \end{aligned}$$

Rezultat: $(4,16)$, $(16,4)$.

4.20 Rešiti sistem jednačina:
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} &= 4 \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y &= 0 \end{aligned}$$

Rezultat: $(-\frac{40}{41}, -\frac{32}{41})$, $\quad(-4,0)$.

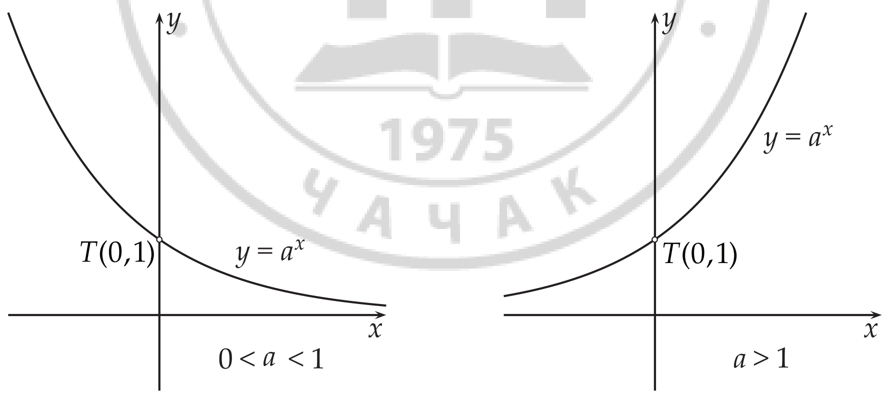
4.21 Rešiti sistem jednačina:
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} &= 4 \\ xy &= 27 \end{aligned}$$

Rezultat: $(27,1)$, $(1,27)$.

Glava 5

Eksponencijalne funkcije, jednačine i nejednačine

Funkcija $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ naziva se *eksponencijalna funkcija*. Njen domen je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, a kodomen $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.



Ako je $0 < a < 1$, tada je funkcija $y = a^x$ pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$, opadajuća za svako $x \in \mathbb{R}$ i prolazi kroz tačku $T(0,1)$. Za $x > 0$ je $0 < a^x < 1$, a za $x < 0$ je $a^x > 1$ (videti sliku).

Ako je $a > 1$, tada je funkcija $y = a^x$ pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$, rastuća za svako $x \in \mathbb{R}$ i prolazi kroz tačku $T(0,1)$. Za $x > 0$ je $a^x > 1$, a za $x < 0$ je $0 < a^x < 1$ (videti sliku).

Eksponencijalnom jednačinom naziva se jednačina kod koje se nepoznata pojavljuje u eksponentu (izložiocu). Pri rešavanju eksponencijalnih jednačina pogodno je koristiti sledeću ekvivalenciju: Za $a > 0$, $a \neq 1$ i proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ je $a^{x_1} = a^{x_2}$ ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Eksponencijalne nejednačine

Ako je $a > 1$, onda nejednakost $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ važi ako i samo ako je $f(x) \leq g(x)$, a ako je $0 < a < 1$, onda nejednakost $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ važi ako i samo ako je $f(x) \geq g(x)$.

Zadaci

Rešiti eksponencijalne jednačine 5.1–5.15:

5.1 a) $2^{x-3} = 16$; b) $100 \cdot 10^{2x-2} = 1000^{\frac{x+1}{9}}$.

Rezultat: a) $x = 7$; b) $\frac{1}{5}$.

5.2 a) $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$; b) $(\frac{1}{4})^5 = 4^{\frac{5x-3}{3}} \cdot (\frac{1}{8})^6$.

Rezultat: a) $x = 1$ ili $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = 3$.

5.3 a) $(\frac{3}{5})^{2x-5} = (\frac{5}{3})^{3x}$; b) $(\frac{9}{4})^{2x-1} = (\frac{2}{3})^{x+1}$.

Rezultat: a) $x = 1$; b) $x = \frac{1}{5}$.

5.4 a) $3^x \cdot 9^{x+1} = 243$; b) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$.

Rezultat: a) $x = 1$; b) $x = 2$.

5.5 a) $6^{2x+6} = 3^{3x+3} \cdot 2^{x+9}$; b) $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1$.

Rezultat: a) $x = 3$; b) $x = \frac{3}{5}$.

5.6 a) $4^{x+1} + 4^x = 320$; b) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.

Rezultat: a) $x = 3$; b) $x = 4$.

5.7 a) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} + 3^{x-6} = 364$;

b) $2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31$.

Rezultat: a) $x = 6$; b) $x = 1$.

5.8 a) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$;

b) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

Rezultat: a) $x = 4$; b) $x = -\frac{1}{2}$.

5.9 a) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$; b) $5^x - 5^{3-x} = 20$;

c) $(11^x - 11)^2 = 11^x + 99$.

Rezultat: a) $x = 1$ ili $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x = 0$ ili $x = \frac{\log 22}{\log 11}$.

5.10 a) $10 \cdot 4^x - 29 \cdot 10^x + 10 \cdot 25^x = 0$; b) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;

c) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$; d) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Rezultat: a) $x = \pm 1$; b) $x = \pm 1$;

c) $x = 1$ ili $x = 2$; d) $x = 0$ ili $x = \frac{1}{2}$.

5.11 a) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; b) $4^{x-\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-2}} = 1$.

Rezultat: a) $x = 3$ ili $x = 11$; b) $x = \frac{3}{2}$.

5.12 $\sqrt[x]{9} - \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4}$.

Rezultat: $x = \dfrac{\log \frac{3}{2}}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

5.13 a) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} = 3^x - 9$;

b) $(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} = \sqrt{3^{x^2-2x-2}}$.

Rezultat: a) $x = 2$; b) $x = -1$ ili $x = 3$.

5.14 $\sqrt[3x+3]{27^{25-11x}} \cdot \sqrt[5x+5]{9^{10,5-41x}} = \sqrt[x+1]{3^{265-x}}$.

Rezultat: $x = -\frac{393}{44}$.

5.15 a) $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x = 2$;

b) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Rezultat: a) $x = 0$; b) $x = \pm 2$.

Rešiti eksponencijalne nejednačine 5.16–5.20.

5.16 a) $(\frac{1}{2})^{x+2} > (\frac{1}{2})^{2x}$; b) $5^{7x+3} > 5^{-3}$.

Rezultat: a) $x > 2$; b) $x > -\frac{6}{7}$.

5.17 $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$.

Rezultat: $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

5.18 $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Rezultat: $x > 0$.

5.19 a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$; b) $4^x - 2 \cdot 9^x - 6^x > 0$.

Rezultat: a) $x > 0$; b) $x < \log_{\frac{2}{3}} 2$.

5.20 $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}$.

Rezultat: $-1 < x \leq 2$ ili $x \geq 3$.

Glava 6

Logaritamske funkcije, jednačine i nejednačine

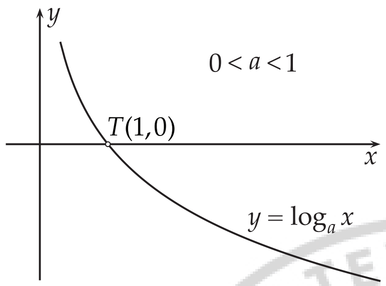
Neka je $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$. Tada je $x = \log_a b$ ako i samo ako je $a^x = b$.

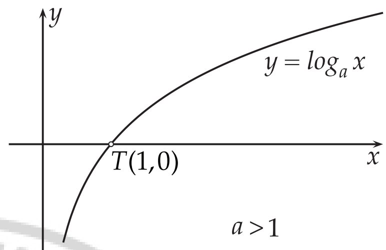
Osnovne osobine logaritma:

$$
\begin{array}{ll}
a^{\log_a b} = b, & a > 0, a \neq 1, b > 0 \\
\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, & x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1 \\
\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y, & x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1 \\
\log_a x^s = s \log_a x, & a > 0, a \neq 1, x > 0, s \in \mathbb{R} \\
\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, & a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 \\
\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, & a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \\
\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b, & a > 0, a \neq 1, b > 0\ m \in \mathbb{R}, m \neq 0 \\
\log_a 1 = 0, & a > 0, a \neq 1 \\
\log_a a = 1, & a > 0, a \neq 1
\end{array}
$$

Uobičajeno je da se $\log_{10} x$ označava sa $\log x$, a $\log_e x$ sa $\ln x$.

Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ inverzna eksponencijalnoj funkciji $y = a^x$, $(a > 0,$ $a \neq 1)$, naziva se *logaritamska funkcija* i označava se sa $y = \log_a x$. Njen domen je $\mathbb{R}^+$, a kodomen je $\mathbb{R}$.





Ako je $0 < a < 1$ tada je funkcija $y = \log_a x$ opadajuća za svako $x \in \mathbb{R}^+$ i prolazi kroz tačku $T(1,0)$. Za $0 < x < 1$ je $\log_a x > 0$, a za $x > 1$ je $\log_a x < 0$ (videti sliku).

Ako je $a > 1$ tada je funkcija $y = \log_a x$ rastuća za svako $x \in \mathbb{R}^+$ i prolazi kroz tačku $T(1,0)$. Za $0 < x < 1$ je $\log_a x < 0$, a za $x > 1$ je $\log_a x > 0$ (videti sliku).

Logaritamske jednačine

Jednačina $\log_a f(x) = b$ ekvivalentna je sistemu $f(x) = a^b$ i $f(x) > 0$.

Logaritamske nejednačine

Uz uslove $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$:

– za $a > 1$ iz $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ sledi $f(x) < g(x)$;

– za $0 < a < 1$ iz $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ sledi $f(x) > g(x)$.

Zadaci

Rešiti logaritamske jednačine 6.1–6.14:

6.1 a) $\log_2 x = 3$; b) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; c) $\log_3(x-1) = 0$.

Rezultat: a) $x = 8$; b) $x = 2$; c) $x = 2$.

6.2 a) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$;

b) $(\log(x+20)-\log x)\cdot\log_x 0{,}1=-1$.

Rezultat: a) $x=2$; b) $x=5$.

6.3 a) $\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$;

b) $\log(5-x)-\frac{1}{3}\log(35-x^3)=0$.

Rezultat: a) $x=4-\sqrt{11}$; b) $x=2$ ili $x=3$.

6.4 a) $\log_4(x-2)+\log_{16}(x-2)+\log_2(x-2)=7$;

b) $\log_3(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=6$.

Rezultat: a) $x=18$; b) $x=26$.

6.5 $\log_7^3 x-3\log_7 x=-2$.

Rezultat: $x=7$.

6.6 $\log_3[2+\log_3(3+x)]=0$.

Rezultat: $x=-\frac{8}{3}$.

6.7 $\log(3-3^x)-\log(3+9^x)+\log 2=0$.

Rezultat: $x=0$.

6.8 $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

Rezultat: $x=2$.

6.9 $x^{\log x}=1000x^2$.

Rezultat: $x=1000$ ili $x=0{,}1$.

6.10 $x^{2+\log_3 x}=3^8$.

Rezultat: $x=\frac{1}{81}$ ili $x=9$.

6.11 $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$.

Rezultat: $x=1$.

6.12 $\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$.

Rezultat: $x=2$ ili $x=4$.

6.13 $2\log_x 3 - \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3.$

Rezultat: $x = 3^{2\pm 2\sqrt{3}}.$

6.14 $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1.$

Rezultat: $x = 4.$

Rešiti logaritamske nejednačine 6.15–6.19:

6.15 a) $\log_2 \frac{x-2}{x+3} < 0;$ b) $\log_{0,2} \frac{4x+6}{x} > 0.$

Rezultat: a) $x > 2;$ b) $-2 < x < -\frac{3}{2}.$

6.16 a) $\log_3(x-2) + \log_3(x+2) < \log_3 5;$

b) $\log_2(x-2) - \log_2(2x-3) < 1.$

Rezultat: a) $2 < x < 3;$ b) $x > 2.$

6.17 $\log_5 x \geq \log_{25}(3x-2).$

Rezultat: $\frac{3}{2} < x \leq 1$ ili $x \geq 2.$

6.18 $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$

Rezultat: $9 \leq x \leq 27.$

6.19 $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3).$

Rezultat: $-\frac{3}{2} < x < -1$ ili $-1 < x < 3.$

Glava 7

Trigonometrija

Osnovne trigonometrijske identičnosti

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

Svođenje na trigonometrijske funkcije oštrog ugla

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad \sin(\pi \pm x) = \mp \sin x \qquad \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x \qquad \cos(\pi \pm x) = -\cos x \qquad \cos\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x \qquad \operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}\left(\tfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x \qquad \operatorname{ctg}\left(\tfrac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x$$

$$\sin(2\pi \pm x) = \pm \sin x \qquad \sin(2k\pi + x) = \sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi \pm x) = \cos x \qquad \cos(2k\pi + x) = \cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(2\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}(k\pi + x) = \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x \qquad \operatorname{ctg}(k\pi + x) = \operatorname{ctg} x \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

gde je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Trigonometrijske funkcije zbira i razlike uglova

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \qquad \operatorname{tg}(x \pm y) = \tfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \tfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \operatorname{tg} 2x = \tfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \operatorname{ctg} 2x = \tfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

Trigonometrijske funkcije polovine ugla

$$\sin \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos x}{2}} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\cos \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{ctg} \tfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod i obrnuto

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} \qquad \sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} \qquad \sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \cos \tfrac{x-y}{2} \qquad \cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}$$

Sinusna teorema: Stranice trougla proporcionalne su sinusima naspramnih uglova, a koeficijent proporcionalnosti je prečnik opisanog kruga oko tog trougla tj.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Kosinusna teorema: Kvadrat jedne stranice trougla jednak je zbiru kvadrata ostale dve stranice umanjenog za dvostruki proizvod ovih stranica i kosinusa ugla koji one obrazuju, tj.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Zadaci

7.1 Proveriti da li važe sledeći indentiteti:

a) $1 - \frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} - \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x} = \sin x \cos x$

b) $\frac{\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\sin x}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

c) $\left(1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = 2\operatorname{tg} x$

d) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

e) $\frac{1+\sin x\cos x}{\cos^3 x - \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^2 x - 2\cos x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$

f) $(\sin x \sin y + 1)^2 = (\sin x + \sin y)^2 + \cos^2 x \cos^2 x$

7.2 Uprostiti izraze:

a) $\dfrac{\sin\frac{34\pi}{15}\operatorname{tg}(-1125^\circ)\sin 242^\circ}{\cos 222^\circ \operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\cos(-692^\circ)}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{10}\right)\sin(-744^\circ)\cos\frac{7\pi}{4}}{\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\cos(-246^\circ)\operatorname{ctg} 396^\circ}$

Rezultat: a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{2}$

7.3 Izračunati:

a) $\sin 3x$ u funkciji od $\sin x$,

b) $\cos 3x$ u funkciji od $\cos x$.

Rezultat: a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^2 x$; b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

7.4 Proveriti da li važe sledeći indentiteti:

a) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\frac{x-y}{2}$

b) $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\frac{x-y}{2}$

c) $\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y\cos(x+y)=\sin^2(x+y)$

Odrediti sva rešenja jednačina 7.5–7.13:

7.5 *a*) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=1;$ *b*) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}.$

Rezultat:

a) $x_k=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ ili $x_n=\frac{7\pi}{18}+\frac{2n\pi}{3},\ k,n\in\mathbb{Z};$

b) $x_k=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

7.6 a) $\sin 2x+2\cos^2 x=0;$ b) $\sin x=\sin 2x;$

c) $\sin 2x-\cos x=0;$ d) $\cos x-\cos 2x=1.$

Rezultat:

a) $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ili $x_n=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \ k,n\in\mathbb{Z};$

b) $x=k\pi$ ili $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\ \ k,n\in\mathbb{Z};$

c) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ili $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ili $x=\frac{5\pi}{6}+2m\pi,\ \ k,n,m\in\mathbb{Z};$

d) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ili $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \ k,n\in\mathbb{Z}.$

7.7 a) $2\cos^2 x-7\cos x+3=0;$ b) $2\sin^2 x+3\sin x+1=0;$

c) $\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x-3=0;$ d) $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0.$

Rezultat:

a) $x_k=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

b) $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ili $x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ili $x=-5\frac{\pi}{6}+2m\pi,\ k,n,m\in\mathbb{Z};$

c) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ili $x=\operatorname{arctg} 2+n\pi,\ k,n\in\mathbb{Z};$

d) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

7.8 a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Rezultat: a) $x_k = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

7.9 a) $\sin 3x \cos 5x = \sin 4x \cos 6x$; b) $\sin 3x \cos 5x = \sin 4x \cos 6x$

Rezultat: a) $x_k = k\pi$ ili $x_n = \frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{9}, k, n \in \mathbb{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$.

7.10 a) $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$;

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Rezultat:

a) $x_k = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ ili $x_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, k, n \in \mathbb{Z}$;

b) $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ili $x_n = (2n+1)\pi$ ili $x_m = \frac{2m\pi}{5}, k, n, m \in \mathbb{Z}$.

7.11 a) $1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2$;

b) $(1 + \cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$.

Rezultat:

a) $x_k = k\pi$ ili $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{8}, k, n \in \mathbb{Z}$;

b) $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ili $x_n = \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}$ ili $x_m = \frac{5\pi}{24} + \frac{m\pi}{2}, k, n, m \in \mathbb{Z}$.

7.12 a) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$;

b) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$.

Rezultat:

a) $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ili $x_n = -\operatorname{arctg} 3 + n\pi, k, n \in \mathbb{Z}$;

b) $x_k = k\pi$ ili $x_n = (3n-1)\frac{\pi}{3}, k, n \in \mathbb{Z}$.

7.13 a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$;

b) $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rezultat:

a) $x_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

b) $x_k = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ili $x_n = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi,\ k,n \in \mathbb{Z}.$

Rešiti nejednačine 7.14–7.17:

7.14 $2\sin x + \cos 2x > 1$

Rezultat: $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.15 $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x > \sqrt{2}.$

Rezultat: $-\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

7.16 $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\cos x - \sqrt{3} \leq 0.$

Rezultat: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ili $\frac{7\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2n\pi,\ k,n \in \mathbb{Z}.$

7.17 $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x.$

Rezultat: $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.18 U trouglu ABC odrediti ostale osnovne elemente ako je dato $c = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 75^\circ$.

Rezultat: $\gamma = 45^\circ$, $a = 3\sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$.

7.19 U trouglu ABC dato je: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ i poluprečnik opisanog kruga $R = 2\sqrt{6}$. Odrediti ostale osnovne elemente trougla.

Rezultat: $\gamma = \frac{5\pi}{12}$, $a = 4\sqrt{2}$, $b = 6\sqrt{2}$, $c = 2(3+\sqrt{3})$.

7.20 U trouglu ABC zadate su sve tri stranice $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$ i $c = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})$. Odrediti uglove trougla i poluprečnik opisanog kruga.

Rezultat: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{5\pi}{12}$, $R = 2$.

Glava 8

Kompleksni brojevi

Element $i \notin \mathbb{R}$ za koji važi $i^2 = -1$ nazivamo *imaginarna jedinica*. Broj oblika $z = x + iy$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$, nazivamo *kompleksan broj*. Brojevi x i y nazivaju se redom *realni* i *imaginarni* deo kompleksnog broja z, u oznakama $x = \operatorname{Re} z$ i $y = \operatorname{Im} z$.

Za imaginarnu jedinicu važi sledeće:

$$i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i, \qquad i^{4k+4} = 1, \qquad (k \in \mathbb{N}^0).$$

Neka su $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleksni brojevi. Tada važi:

$$z_1 = z_2 \quad \text{ako i samo ako } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2;$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \tfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \tfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\tfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad (z_2 \neq 0).$$

Broj $\bar{z} = x - iy$ naziva se *konjugovano-kompleksni* broj broja $z = x + iy$.

Kompleksna ravan je koordinatna ravan u kojoj je svaki kompleksan broj $z = x + iy$ predstavljen tačkom $M(x, y)$. Osa Ox je realna, a osa Oy je imaginarna osa. Rastojanje od koordinatnog početka do tačke $M(x, y)$ nazivamo *modul kompleksnog broja* $z = x + iy$ i računamo po formuli

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

i očigledno važi $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Ugao između pozitivnog dela x-ose i pravca nenula vektora $\overrightarrow{OM}$ naziva se *argument kompleksnog broja* $z = x + iy$ i označavaćemo ga sa φ. Da bismo ga odredili, najpre, ćemo definisati ugao $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, tako da je $\varphi_0 = \operatorname{arctg} |\frac{y}{x}|$. Tada ugao $\varphi \in (-\pi, \pi]$ odredjujemo na sledeći način:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & \text{za } x > 0, y > 0 \quad \text{(I kvadrant);} \\ \pi - \varphi_0, & \text{za } x < 0, y > 0 \quad \text{(II kvadrant);} \\ -\pi + \varphi_0, & \text{za } x < 0, y < 0 \quad \text{(III kvadrant);} \\ -\varphi_0, & \text{za } x > 0, y < 0 \quad \text{(IV kvadrant).} \end{cases}$$

Specijalno je:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{za } x = 0 \text{ i } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{za } x = 0 \text{ i } y < 0; \\ 0, & \text{za } x > 0 \text{ i } y = 0; \\ \pi, & \text{za } x < 0 \text{ i } y = 0. \end{cases}$$

Za $z = 0$ nema smisla definisati argument od z.

Dva najčešća načina predstavljanja kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravni su *algebarski oblik* $z = x + iy$ i *trigonometrijski oblik* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. U primenama se često koristi *Ojlerova formula*: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, odakle dobijamo i *eksponencijalni oblik* kompleksnog broja $z = \rho e^{i\varphi}$.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je pogodan za stepenovanje i korenovanje kompleksnog broja. Stoga, prilikom stepenovanja ili korenovanja kompleksnog broja, ako je on dat u algebarskom obliku, najčešće se prevodi u trigonometrijski oblik.

Za kompleksan broj $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ formula za n-ti stepen $n \in \mathbb{N}$ je

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

a formula za n-ti koren je

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Kod formule za stepenovanje kompleksnog broja iskoristili smo *Muavrovu formulu*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Zadaci

8.1 Izračunati:

$$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}+i^{24}+i^{33}+i^{49}$$

Rezultat: 1.

8.2 Ako je $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, dokazati da je $z^2+z+1=0$ i $z^3=1$.

8.3 Date kompleksne brojeve napisati u trigonometrijskom obliku:

a) $z=-1+i$, b) $z=3-i\sqrt{3}$.

Rezultat: a) $z=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$; b) $z=\sqrt{12}(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6})$.

8.4 Izračunati:

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$

Rezultat: a) 2; b) 1.

8.5 Izračunati: $\frac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^6\cdot(1-i)^6}$

Rezultat: $-\frac{i}{4}$.

8.6 Izračunati: $(\sqrt{2}+i)^6+(\sqrt{2}-i)^6$.

Rezultat: -46.

8.7 Izračunati: $\left(\frac{3}{1+i}+\frac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Rezultat: 2^{24}.

8.8 U jednačini $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$ odrediti kompleksan broj z i napisati ga u trigonometrijskom obliku.

Rezultat: $z=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

8.9 Naći sve kompleksne brojeve z takve da je:

a) $z^2=1-i\sqrt{3}$; b) $z^4=-16$.

Rezultat:

a) $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$ i $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

b) $z_0 = \sqrt{2}(1+i), z_1 = \sqrt{2}(-1+i), z_2 = \sqrt{2}(-1-i), z_3 = \sqrt{2}(1-i).$

8.10 Rešiti po z jednačinu $(z = x + iy)$:

a) $2z(3-5i) + z - 1 = -30 - 65i$

b) $(z+i)(1+2i) + (1+zi)(3-4i) = 1 + 7i$

Rezultat: a) $z = 3 - 5i;$ b) $z = 1 + \frac{1}{2}i.$

8.11 Dat je kompleksan broj $z = \frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i} - \frac{2-i}{3+i}\right)$. Odrediti $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$.

Rezultat: $\operatorname{Re} z = -\frac{24}{169}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{10}{169}$, $|z| = \frac{2}{13}$.

8.12 Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 + i$. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava uslove

a) $\operatorname{Re}(\frac{z}{z_1}) = \frac{3}{5}$ i $\operatorname{Im}(\bar{z}z_1) = 1,$

b) $\operatorname{Re}(\bar{z}z_1) = 1$ i $\operatorname{Im}(\frac{z}{z_1}) = -\frac{3}{5}.$

Rezultat: a) $z = -1 - i;$ b) $z = 1 - i.$

8.13 Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ ako je:

a) $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ i $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1,$

b) $|z^2 - 2i| = 4$ i $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1,$

c) $\left|\frac{\bar{z}-1}{2z-6}\right| = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{Re}\left(\frac{2\bar{z}+3}{z+1}\right) = 1.$

Rezultat: a) $z = 6 + 17i$ ili $z = 6 + 8i;$ b) $z = \pm(1-i);$ c) $z = \frac{1}{4} \pm i.$

8.14 Izračunati z^n ako je:

a) $n = 3, z = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$

b) $n = 7, z = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}.$

Rezultat: a) $z^3 = 1;$ b) $z^7 = i.$

8.15 Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ ako je $\left|\frac{16z+1}{4\bar{z}}\right| = 4$ i $\operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\bar{z}}\right) = 1.$ Zatim izračunati sve vrednosti $\sqrt[4]{z}$.

Rezultat: $z_1 = -\frac{1}{32} + \frac{i\sqrt{3}}{32}$ ili $quadz_2 = -\frac{1}{32} - \frac{i\sqrt{3}}{32}$.
Vrednosti $\sqrt[4]{z_1}$ su: $\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $\pm\frac{1}{4}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.
Vrednosti $\sqrt[4]{z_2}$ su: $\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-i\right)$, $\pm\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

8.16 Izračunati:

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$, b) $\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{10}-1}}$.

Rezultat:

a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)$ $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$;

b) $\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k \in \{0,1,2,3\}$.

8.17 Rešiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Rezultat:

$$z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0,1,2\}$$

ili

$$z = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0,1,2\}.$$

8.18 Dokazati da je

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+z_1^2)(2+z_2^2)(2+z_3^2),$$

gde su z_1, z_2, z_3 međusobno različita rešenja jednačine $z^3 = 1$.

8.19 Neka je $z \neq -1$ kompleksan broj. Dokazati ekvivalenciju:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 \text{ ako i samo ako } |z| = 1.$$

8.20 Odrediti sve kompleksne brojeve z, tako da brojevi z, $\frac{1}{z}$ i $1-z$ imaju jednake module, pa za tako nađeno z izračunati $\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5}$.

Rezultat:

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5} = \sqrt[6]{32}\left(\cos\frac{(8k+5)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k+5)\pi}{12}\right), \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Glava 9

Vektori

Vektor $\vec{a}$ je orjentisana duž čiji je početak u koordinatnom početku. Ostale orjentisane duži koje su iste dužine, istog pravca i smera sa vektorom $\vec{a}$ identifikovaćemo sa $\vec{a}$ prema potrebama vektorskog računa i njegovim primenama. *Intezitet* $|\vec{a}|$ vektora $\vec{a}$ je dužina te orjentisane duži.

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su *linearno zavisni* ako postoje brojevi α_1, α_2, $\ldots$, α_n od kojih bar jedan nije jednak 0, takvi da je $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. U protivnom su *linearno nezavisni*. Dva vektora su linearno zavisna ako i samo su *kolinearna* (tj. pripadaju jednoj pravoj), a tri vektora su linearno zavisna ako i samo ako su *komplanarna* (tj. pripadaju istoj ravni). Četiri ili više vektora u trodimenzionalnom prostoru su uvek linearno zavisna.

Uređena trojka međusobno normalnih jediničnih vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ zove se *baza* pravouglog koordinatnog sistema u prostoru. Svaki vektor $\vec{a}$ se može na jedinstven način predstaviti u obliku: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$, gde su $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Brojevi a_1, a_2, a_3 se nazivaju *koordinate vektora* $\vec{a}$. Iz te činjenice sledi da je $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ i $\vec{k} = (0,0,1)$.

Ako je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ tada je:

$\vec{a} = \vec{b}$ ako i samo ako $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_3$;
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$ i $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Jedinični vektor vektora $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$) je $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Ako je $O(0,0,0)$ koordinatni početak onda su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ u koordinatnom sistemu $Oxyz$, jedinični vektori koordinatnih osa Ox, Oy, Oz, respektivno. Tačka M ima koordinate (x,y,z) ako i samo ako je $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$. Tačke $M(x_1,y_1,z_1)$ i $N(x_2,y_2,z_2)$ određuju vektor $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, a *rastojanje između tačaka* M i N je

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Skalarni proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je broj:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})).$$

Posebno za proizvoljan vektor $\vec{a}$ i nula vektor $\vec{0}$ stavljamo da je
$\vec{a} \circ \vec{0} = \vec{0} \circ \vec{a} = 0$.

Za proizvoljne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$;
$(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{b})$;
$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{c}) + (\vec{b} \circ \vec{c})$.

Za nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ ako i samo ako je $\vec{a} \perp \vec{b}$;
$\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Ako su vektori dati koordinatama $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$,
tada je: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b}$ nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor čiji je:

1. intenzitet: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$;
2. pravac takav da je ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$;
3. smer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ čine desni sistem vektora.

Posebno za proizvoljan vektor $\vec{a}$ i nula vektor $\vec{0}$ stavljamo da je
$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Za tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kažemo da čine desni sistem vektora (desni triedar), ako se, kada su dovedeni na zajednički početak, rotacija vektora $\vec{a}$ do vektora $\vec{b}$, za ugao manji od 180°, vrši u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, posmatrano sa vrha vektora $\vec{c}$. Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati pomoću pravouglih koordinata, tada oni čine desni triedar ako je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Za proizvoljne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi:

$$\begin{aligned} &\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \\ &(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}); \\ &(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}); \\ &\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

Za nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori, tj. ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je $\vec{a} = \lambda\vec{b}$;

Površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Ako su vektori dati koordinatama $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tada je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, je broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$.

Za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ važi:

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$;

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ ako i samo ako su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni vektori;

Zapremina paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednaka je $V_p = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$, a zapremina odgovarajućeg tetraedra je $V_T = \frac{1}{6}V_p = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.

Ako su vektori dati koordinatama $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ tada je:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Zadaci

9.1 Odrediti temena B, C, D i presek T dijagonala paralelograma $ABCD$, ako je $A(2, -1, 5)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 1)$ i $\overrightarrow{AD} = (1, -5, 3)$.

Rezultat: $B(3, 2, 6)$, $C(4, -3, 9)$, $D(3, -6, 8)$, $T(3, -2, 7)$.

9.2 Data su tri uzastopna temena paralelograma $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ i $C(6, 4, 4)$. Naći koordinate četvrtog temena.

Rezultat: $D(4, 0, 6)$.

9.3 Data su temena $A(1, 2, 2)$ i $B(3, 0, 3)$ i vektor $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ trougla ABC. Odrediti koordinate vektora C i dužinu stranice AB.

Rezultat: $C(7, 3, 8)$ i $|\ \overrightarrow{AB}\ | = 3$.

9.4 Dati su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Dokazati da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni i izraziti vektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ako je:

a) $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, -1)$ i $\vec{d} = (3, 7, -7)$;

b) $\vec{a} = (3, 2, -1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 3)$, $\vec{c} = (2, 0, -2)$ i $\vec{d} = (11, 1, -10)$.

Rezultat: 1. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$;   2. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

9.5 Dokazati da je $\triangle ABC$ pravougli ako je $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$.

9.6 Izračunati ugao između dijagonala AC i BD četvorougla čija su temena
$A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(5, 0, 2)$, $D(-1, 1, 1)$.

Rezultat: $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{1}{2}$, pa je $\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{2\pi}{3}$.

9.7 Dati su vektori $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$ i $\vec{c}=(1,2,-6)$. Odrediti vektor $\vec{d}$, normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, takav da je $\vec{c}\circ\vec{d}=3$.

Rezultat: $\vec{d}=(-3,3,0)$.

9.8 Dati su vektori $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$ i $\vec{c}=(2,3,1)$. Odrediti vektor $\vec{d}$, normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji sa vektorom $\vec{c}$ određuje paralelogram površine $\sqrt{75}$.

Rezultat: $\vec{d}=(1,-2,1)$ ili $\vec{d}=(-1,2,-1)$.

9.9 Dati su vektori $\vec{a}=(1,1,1)$ i $\vec{b}=(1,-1,-1)$. Odrediti jedinični vektor $\vec{c}$ koji sa vektorom $\vec{a}$ gradi ugao od 30°, takav da je površina paralelograma određenog vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka $\sqrt{2}$.

Rezultat: $\vec{c}=(\frac{1}{4},\frac{5+\sqrt{5}}{8},\frac{5-\sqrt{5}}{8})$ ili $\vec{c}=(\frac{1}{4},\frac{5-\sqrt{5}}{8},\frac{5+\sqrt{5}}{8})$.

9.10 Dati su vektori $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$ i $\vec{c}=(13,2,0)$. Odrediti vektor $\vec{d}$ takav da je $|\vec{d}|=\sqrt{6}$, $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\sphericalangle(\vec{d},\vec{c})$ oštar i da je površina paralelograma određenog vektorima $\vec{b}$ i $\vec{d}$ jednaka $\sqrt{11}$.

Rezultat: $\vec{d}=(1,-2,1)$ ili $\vec{d}=(\frac{13}{7},-\frac{11}{7},-\frac{2}{7})$.

9.11 Odrediti vektor $\vec{c}$, normalan na vektore $\vec{a}=(2,1,3)$ i $\vec{b}=(1,2,2)$, ako je $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{69}$ i ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ čine levi triedar.

Rezultat: $\vec{c}=(4,1,-3)$.

9.12 Dati su vektori $\vec{a}=(3,2,-2)$, $\vec{b}=(-1,4,1)$ i $\vec{c}=(10,2,m)$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Odrediti m tako da zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bude jednaka 140, a vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine desni triedar.

b) Za tako nađeno m, razložiti vektor $\vec{d}=(19,-6,-4)$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rezultat: a) $m=3$; b) $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

9.13 Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obrazuju ugao $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Znajući da je $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, naći $(3\vec{a}-2\vec{b})\circ(\vec{a}+2\vec{b})$ i $(\vec{a}-\vec{b})\circ(\vec{a}-\vec{b})$.

Rezultat: - 61 i 37.

9.14 Tačke $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$ i $D(2,3,8)$ su temena piramide. Izračunati zapreminu piramide i visinu piramide koja odgovara temenu D.

Rezultat: $V = 14$ i $H_D = \sqrt{14}$.

9.15 Izračunati dužine dijagonala paralelograma konstruisanog nad vektorima
$\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ i $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Rezultat: $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$.

Glava 10

Analitička geometrija u ravni

10.1 Tačka

Svaka tačka u ravni u kojoj je uočen dvodimenzioni pravougli koordinatni sistem može biti predstavljena dvema koordinatama, npr. $A(x_1, y_1)$, pri čemu prvu koordinatu x_1 nazivamo *apscisa*, a drugu koordinatu y_1 nazivamo *ordinata*. *Rastojanje između tačaka* $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, u oznaci $d(A, B)$ ili kraće $|AB|$, računa se po formuli:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ako su date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, koordinate tačke C koja pripada pravoj AB i deli duž AB u odnosu $\frac{AC}{CB} = \lambda$ su $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, tj. $C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$. Specijalno, ako je C *središte duži* AB važi $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Ako je trougao ABC zadat koordinatama svojih temena $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ tada se *površina trougla* računa po formuli:

$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

ili

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadaci

10.1 Dokazati da je trougao ABC pravougli, ako su njegova temena $A(1,-1)$, $B(7,-3)$ i $C(5,1)$.

10.2 Naći koordinate temena trougla ABC ako su data središta njegovih stranica i to tačka $P(3,-2)$ je središte duži AB, tačka $Q(1,6)$ je središte stranice BC i tačka $R(-4,2)$ je središte stranice AC.

Rezultat: $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$.

10.3 Data su temena trougla ABC : $A(-6,0)$, $B(-7,7)$, $C(1,1)$. Odrediti koordinate centra S kruga opisanog oko trougla ABC. Koliko je tačka S udaljena od tačke R , gde je R centar kruga opisanog oko trougla MNP, ako je $M(-1,8)$, $N(-3,4)$ i $P(6,7)$?

Rezultat: $S(-3,4)$, $R(2,4)$, $d(S,R)=5$.

10.4 Duž AB je podeljena na pet jednakih delova. Odrediti koordinate dobijenih tačaka, ako je $A(3,2)$, $B(15,6)$.

Rezultat: $M_1\left(\frac{27}{5},\frac{14}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{39}{5},\frac{18}{5}\right)$, $M_3\left(\frac{51}{5},\frac{22}{5}\right)$ i $M_4\left(\frac{63}{5},\frac{26}{5}\right)$.

10.5 Dat je trougao ABC. Naći tačku preseka simetrale unutrašnjeg ugla kod temena A i stranice BC ako je $A(4,1)$, $B(7,5)$ i $C(-4,7)$.

Rezultat: Tražena tačka ima koordinate $\left(\frac{10}{3},\frac{17}{3}\right)$.

10.6 Date su tačke $A(1,3)$, $B(3,y)$ i $C(-4,-2)$. Odrediti y tako da ove tri tačke leže na istoj pravoj.

Rezultat: $y=5$.

10.7 Date su tačke $A(-3,-3)$, $B(3,5)$ i $C(-2,5)$. Odrediti površinu trougla ABC i visinu h_c.

Rezultat: $P=20$, $h_c=4$.

10.8 Temena trougla su $A(2,-4)$, $B(7,6)$ i $C(12,1)$. Tačka M deli stranicu AB u razmeri $2:3$, a tačka N stranicu BC u razmeri $3:2$. Odrediti:

a) površine trouglova ABC, MNB i površinu trapeza $ACMN$,
b) odnos površina trouglova ABC i MNB.

Rezultat: a) $P_{ABC}=\frac{75}{2}$, $P_{MNB}=\frac{27}{2}$, $P_{ACMN}=24$; b) $P_{ABC}:P_{MNB}=25:9$.

10.9 Tačke $A(8,6)$, $B(2,4)$ i $C(x,y)$ su temena trougla.

a) Odrediti vezu između x i y da bi površina trougla bila 20.
b) Odrediti x i y, tako da površina trougla bude 20, a stranica $AC = BC$.

Rezultat: a) $|x - 3y + 10| = 20$; b) $C(7,-1)$ ili $C(3,11)$.

10.10 Na datoj duži AB odrediti tačku Q, ako:

a) $A(1,-1)$, $B(4,5)$, tačka Q ima ordinatu 1;
b) $A(-4,2)$, $B(3,16)$, apscisa tačke Q je 1;
c) $A(1,3)$, $B(5,-1)$, tačka Q je presek sa osom Ox.

Rezultat: a) $Q(2,1)$; b) $Q(1,12)$; c)$Q(4,0)$.

10.2 Prava

Skup tačaka (x,y) u ravni u kojoj je uočen dvodimenzioni pravougli koordinatni sistem, kojem odgovara linearna jednačina po x i y je *prava*. Postoji više oblika jednačine prave:

–*implicitni (opšti) oblik*: $Ax + By + C = 0$, $A,B,C \in \mathbb{R}$, $(A,B) \neq (0,0)$;

–*eksplicitni oblik*: $y = kx + n$, gde je $k = \operatorname{tg}\varphi$ koeficijent pravca te prave, pri čemu je φ ugao koji prava zaklapa sa pozitivnim delom x-ose, a n je vrednost na y-osi u kojoj je prava preseca;

–*segmentni oblik*: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gde su a i b vrednosti na x-osi i y-osi u kojima prava redom seče te ose;

–*jednačina prave kroz dve tačke* $M(x_1,y_1)$ i $N(x_2,y_2)$ je: $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$, gde je $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = k = \operatorname{tg}\varphi$ koeficijent pravca te prave;

–*jednačina prave kroz tačku* $M(x_1,y_1)$ je: $y - y_1 = k(x - x_1)$, gde je k koeficijent pravca prave.

Neka su $l_1 : y = k_1x + n_1$ i $l_2 : y = k_2x + n_2$ dve prave u ravni. Tada su prave l_1 i l_2 *paralelne* ako i samo ako je $k_1 = k_2$. Prave l_1 i l_2 su *normalne* ako i samo ako je $k_1k_2 = -1$. Ako se prave l_1 i l_2 seku pod uglom φ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$, tada ugao φ računamo po formuli $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Rastojanje tačke $M(x_0, y_0)$ *od prave* $p: Ax + By + C = 0$ računa se po formuli:

$$d(M,p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Zadaci

10.11 Date su prave $l_1: y = -x + 3$ i $l_2: y = 2x - 4$. Ispitati koje od sledećih tačaka priradaju datim pravama: $A(1,2)$, $B(2,0)$ i $C(0,3)$.

Rezultat: Pravoj l_1 pripadaju tačke A i C, a pravoj l_2 tačka B.

10.12 Odrediti ugao pod kojim se seku prave:

a) $x + 2y - 9 = 0 \quad \text{i} \quad x - 3y + 14 = 0$;

b) $x\sqrt{3} - y + 4 = 0 \quad \text{i} \quad x\sqrt{3} + y - 4 = 0$.

Rezultat: a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

10.13 Odrediti vrednost parametra m tako da prava $2x - y + 3 = 0$ bude:

a) paralelna pravoj $(1 - m)x + (m + 1)y - 4 = 0$;

b) normalna na pravu $(2m - 1)x + (m + 1)y - 2 = 0$.

Rezultat: a) $m = -3$; b) $m = \frac{1}{3}$.

10.14 Naći pravu koja seče prave: $x + y + 3 = 0$ i $2x - y - 5 = 0$ u tačkama A i B, pri čemu je tačka $M(1,1)$ središte duži AB.

Rezultat: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

10.15 Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(-1,3)$ i seče pravu $l: 3x + 2y + 2 = 0$ pod uglom od $\frac{\pi}{4}$.

Rezultat: $x + 5y - 14 = 0$ ili $5x - y + 8 = 0$.

10.16 Datoj tački $A(1,3)$ naći tačku B, simetričnu u odnosu na datu pravu $s: x - 3y + 3 = 0$.

Rezultat: $B(2,0)$.

10.17 Svetlosni zrak polazi iz tačke $A(1,2)$, odbija se od prave $a: 3x - y + 5 = 0$ i prolazi kroz tačku $B(7,8)$. Napisati jednačinu upadnog i odbojnog zraka.

Rezultat: Jednačina upadnog zraka je $2x + y - 4 = 0$, a odbojnog $x - 2y + 9 = 0$.

10.18 Tačke $A(-5,-2)$, $B(7,6)$ i $C(5,4)$ određuju trougao ABC. Odrediti:

a) jednačinu stranice AB;

b) jednačinu težišne duži t_a;

c) jednačinu visine h_c;

d) uglove α i β, gde su $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$;

e) koordinate težišta trougla.

Rezultat: a) $2x - 3y + 4 = 0$; b) $3x - 11y - 7 = 0$; c) $3x + 2y - 7 = 0$; d) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; e) $T\left(\frac{7}{2},0\right)$.

10.19 Date su stranice trougla: $AB : 3x + y - 3 = 0$, $AC : 3x + 4y = 0$ kao i simetrala ugla $s_\beta : x - y + 5 = 0$ kod temena B. Odrediti jednačinu nepoznate stanice BC.

Rezultat: $BC : x + 3y - 13 = 0$.

10.20 Odrediti koordinate temena kvadrata $ABCD$, ako je dato teme $B(-3,-6)$ i jednačina dijagonale $AC : 2x + y + 2 = 0$.

Rezultat: $A(-1,0)$, $C(3,-8)$ i $D(5,-2)$.

10.3 Kružnica

Kružnica je skup tačaka u ravni čija su rastojanja od jedne stalne tačke jednaka datoj veličini. Jednačina kružnice sa centrom $S(p,q)$ i poluprečnikom r je

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Ovaj oblik jednačine kružnice se naziva *kanonski oblik*.

Prava $l : y = kx + n$ i kružnica $\mathcal{K} : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ u ravni mogu da imaju dve zajedničke tačke (seku se), jednu zajedničku tačku (dodiruju se tj. prava je tangenta kružnice) ili da nemaju zajedničkih tačaka. Broj zajedničkih tačaka zavisi od broja realnih rešenja sistema koji čine jednačina prave i jednačina kružnice. *Uslov dodira prave i kružnice* glasi:

$$r^2(k^2+1) = (kp - q + n)^2.$$

Ako je $T(x_0, y_0)$ tačka sa kružnice $\mathcal{K} : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, tada *jednačina tangente na datu kružnicu kroz tačku T* ima oblik

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2.$$

Ugao preseka između prave i kružnice je ugao između prave i tangente date kružnice u jednoj od tačaka preseka. *Ugao preseka između dve kružnice* je ugao između tangenata datih kružnica u jednoj od presečnih tačaka.

Zadaci

10.21 Napisati jednačinu kružnice opisane oko trougla ABC, gde su njegova temena $A(2,2)$, $B(4,6)$ i $C(8,8)$.

Rezultat: $(x-9)^2 + (y-1)^2 = 50$.

10.22 Odrediti realan parametar k, tako da kružnica

a) $x^2 + y^2 - (5k-1)x + (4-2k)y - 5k = 0$ dodiruje x-osu;

b) $x^2 + y^2 - (k-4)x - ky + 2k + 5 = 0$ dodiruje y-osu.

Rezultat: a) $k = -\frac{1}{5}$; b) $k = 10$ ili $k = -2$.

10.23 Odrediti jednačine tangenata kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ koje seku pravu $7x - y = 0$ pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Rezultat: $4x + 3y - 29 = 0$ ili $4x + 3y + 21 = 0$.

10.24 Kružnica sa centrom $S(3,-1)$ odseca na pravoj $l : 2x - 5y + 18 = 0$ tetivu dužine 6. Naći jednačinu ove kružnice.

Rezultat: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$.

10.25 Odrediti ugao pod kojim se seku:

a) prava $y = 3x - 1$ i kružnica $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$;

b) kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$ i $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$.

Rezultat: a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

10.26 Iz tačke $A(4,2)$ van kružnice konstruisane su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$. Odrediti:

a) površinu trougla čija su temena data tačka A i dodirne tačke pomenutih tangenata;

b) ugao pod kojim se data kružnica vidi iz tačke A.

Rezultat: a) $P = \frac{5}{2}$; b) $\varphi = arctg \frac{\sqrt{145}}{12}$.

10.4 Elipsa

Jednačina elipse glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ili} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

gde su a i b poluose elipse $(a,b > 0)$. Ako je $a \geq b$, onda je a *velika (fokalna) poluosa*, a b je *mala poluosa* elipse. U tom slučaju *žiže* pripadaju x-osi i imaju koordinate $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$, gde je $c^2 = a^2 - b^2$. Za bilo koju tačku M na elipsi važi jednakost $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. *Ekscentricitet elipse* $e = \frac{c}{a}$ meri odstupanje elipse od kružnice. Analogno prethodnom bi se razmotrio slučaj kada je $b > a$.

Prava $l : y = kx + n$ i elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u ravni mogu da imaju dve zajedničke tačke (seku se), jednu zajedničku tačku (dodiruju se tj. prava je tangenta elipse) ili da nemaju zajedničkih tačaka. Broj zajedničkih tačaka zavisi od broja realnih rešenja sistema koji čine jednačina prave i jednačina elipse. *Uslov dodira prave i elipse* glasi:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2.$$

Ako je $T(x_0,y_0)$ tačka sa elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tada *jednačina tangente na datu elipsu kroz tačku* T ima oblik

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Ugao preseka između prave i elipse je ugao između prave i tangente date elipse u jednoj od tačaka preseka.

Zadaci

10.27 Odrediti jednačinu elipse koja sadrži tačke $M(6,4)$ i $N(-8,3)$.

Rezultat: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

10.28 Odrediti ugao pod kojim se vidi elipsa $3x^2 + y^2 = 48$ iz tačke $P(8,0)$.

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

10.29 Naći tangente elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ normalne na pravoj $p : x - y + 3 = 0$.

Rezultat: $x + y + 5 = 0$ i $x + y - 5 = 0$.

10.30 Kroz tačku $A(-2,-1)$ postaviti tetivu elipse $x^2 + 4y^2 = 12$, tako da A bude središte tetive.

Rezultat: $x + 2y + 4 = 0$.

10.31 Napisati jednačinu elipse koja dodiruje prave $x + y - 8 = 0$ i $x + 3y + 16 = 0$.

Rezultat: $3x^2 + 5y^2 = 120$.

10.32 Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih $9x^2 + 16y^2 = 144$ i $16x^2 + 9y^2 = 144$.

Rezultat: Zajedničke tangente su $x - y + 5 = 0$, $x - y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$.

10.5 Hiperbola

Jednačina hiperbole je:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ili} \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

gde je a *realna poluosa*, a b *imaginarna poluosa*. *Žiže* pripadaju x-osi i imaju koordinate $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$, gde je $c^2 = a^2 + b^2$. Za bilo koju tačku M na hiperboli važi jednakost $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$. *Ekscentricitet* hiperbole je $e = \frac{c}{a}$. Jednačine *asimptota* hiperbole su: $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$. Napomenimo da jednačina $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ takođe predstavlja hiperbolu. U ovom slučaju je b realna, dok je a imaginarna poluosa hiperbole, i analogno prethodnom razmotrio bi se i ovaj slučaj.

Ako su date prava $l : y = kx + n$ i hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tada uslov dodira između njih glasi:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2.$$

Ako je $T(x_0, y_0)$ tačka sa hiperbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tada *jednačina tangente na datu hiperbolu kroz tačku T* ima oblik

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Zadaci

10.33 Izračunati rastojanje žiža hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ od njenih asimptota.

Rezultat: $d = 8$.

10.34 Odrediti jednačinu hiperbole ako je rastojanje između njenih žiža jednako $10\sqrt{2}$, a jednačine njenih asmptota su $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Rezultat: $9x^2 - 16y^2 = 288$.

10.35 Odrediti temena kvadrata upisanog u hiperbolu $25x^2 - 16y^2 = 400$.

Rezultat: $A\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$, $B\left(-\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$, $C\left(-\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}\right)$, $D\left(\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}\right)$.

10.36 Napisati jednačine tangenti hiperbole $17x^2 - 9y^2 = 153$, koje sa pravom $p : 2x - y + 3 = 0$ grade ugao $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Rezultat: $3x + y + 8 = 0$ i $3x + y - 8 = 0$.

10.37 Na hiperboli $3x^2 - 4y^2 = 72$ odrediti tačku A najbližu pravoj $3x + 2y + 1 = 0$ i izračunati rastojanje između te tačke i date prave.

Rezultat: Tražena tačka je $A(-6, 3)$, a traženo rastojanje je $d = \sqrt{13}$.

10.6 Parabola

Parabola je skup tačaka koje su jednako udaljene od date prave (*direktrise*) i date tačke (*žiže*), pri čemu žiža ne pripada direktrisi. Jednačina parabole je

$$y^2 = 2px,$$

pri čemu je jednačina direktrise $x + \frac{p}{2} = 0$, a žiža $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. U ovom slučaju x-osa je osa simetrije parabole.

Ako su date prava $l : y = kx + n$ i parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ tada *uslov dodira* između njih glasi:

$$p = 2kn.$$

Ako je $T(x_0, y_0)$ tačka sa parabole $\mathcal{P} : y^2 = 2px$, tada *jednačina tangente na datu parabolu kroz tačku* T ima oblik $y_0 y = p(x + x_0)$.

Napomenimo da se analogno može razmatrati i parabola $x^2 = 2qy$.

Zadaci

10.38 Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 12x$ koja je paralelna pravoj $x - y + 5 = 0$.

Rezultat: $y = x + 3$.

10.39 Iz tačke $S(-2, -2)$ konstruisane su tangente na parabolu $y^2 = 16x$. Odrediti:

a) jednačine tangenti;

b) ugao pod kojim se vidi parabola iz tačke S;

c) površinu trougla kog obrazuju tangente i prava koja prolazi kroz dodirne tačke.

Rezultat: a) Jednačine tangenti su: $2x - y + 2 = 0$ i $x + y + 4 = 0$;
b) $\varphi = \operatorname{arctg} 3$; c) $P = 27$.

10.40 U parabolu $y^2 = 2x$ upisan je jednakostraničan trougao OAB gde je O koordinatni početak. Odrediti tačke A i B.

Rezultat: $A(6, -2\sqrt{3})$, $B(6, 2\sqrt{3})$.

10.41 Naći zajedničke tangente parabola $y^2 = x$ i $y = x^2$.

Rezultat: $4x + 4y + 1 = 0$.

10.7 Krive drugog reda

Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola se nazivaju krive drugog reda. Opšti oblik krivih drugog reda je:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Sledeći zadaci predstavljaju kombinaciju problema vezanih za pomenute krive drugog reda.

Zadaci

10.42 Napisati jednačine zajedničkih tangenti datih krivih:

a) $x^2 + y^2 - 4y - 28 = 0$ i $9x^2 + 16y^2 = 576$;

b) $25x^2 + 100y^2 = 4$ i $x^2 - 3y^2 = 1$;

c) $x^2 + y^2 = 2$ i $y^2 = 8x$.

Rezultat:

a) $x - y + 10 = 0$ i $x + y - 10 = 0$;

b) $2x + 3y + 1 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 1 = 0$;

c) $x + y + 2 = 0$ i $x - y + 2 = 0$

10.43 Pod kojim se uglom seku krive:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ i $y^2 = 3x$;

b) $x^2 + y^2 = 4$ i $3x^2 + 4y^2 = 13$.

Rezultat: a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; b) $\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{13}$.

10.44 Kroz žiže elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ prolazi parabola čije se teme poklapa sa jednim temenom elipse. Odrediti jednačinu parabole.

Rezultat: $4x^2 + 9y - 36 = 0 \quad \text{i} \quad 4x^2 - 9y - 36 = 0.$

10.45 Odrediti skup središta onih tetiva parabole $y^2 = 12x$ koje su paralelne pravoj $3x - 4y + 1 = 0$.

Rezultat: $y - 8 = 0.$

Glava 11

Progresije i binomna formula

11.1 Progresije

11.1.1 Aritmetička progresija

Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ ili n-torka brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naziva se *aritmetička progresija* ako je razlika između svaka dva susedna člana stalna tj. ako postoji broj d takav da je:

$$a_k - a_{k-1} = d, \quad \text{za svako} \quad k = 2,3,4,\ldots,$$

odnosno

$$a_k - a_{k-1} = d, \quad \text{za svako} \quad k = 2,3,\ldots,n; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Član a_1 se naziva *prvi član* posmatrane progresije, dok član a_k sa neodređenim indeksom k (k-ti član) se naziva *opšti član* ove progresije, a broj d se naziva *razlika* (*diferencija*) posmatrane progresije.

Prvi član, razlika i opšti član aritmetičke progresije povezani su formulom:

$$a_k = a_1 + (k-1)d, \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Zbir S_k prvih k ($k = 1,2,3,\ldots$) članova aritmetičke progresije je

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)k}{2} \qquad \text{ili} \qquad S_k = \frac{[2a_1 + (k-1)d]k}{2}.$$

Za opšti član, takođe, važi da je $a_k = \frac{a_{k+m}+a_{k-m}}{2}$, $(k, m = 1, 2, 3, \ldots; m < k)$ i za broj a_k kažemo da je *aritmetička sredina* brojeva a_{k+m} i a_{k-m}.

Ako je r ($r \in \mathbb{N}$) broj članova koji treba interpolirati između dva data broja a i b tako da čine aritmetičku progresiju, tada važi: $d = \frac{b-a}{r+1}$.

Zadaci

11.1 Izračunati a_1 i d u aritmetičkom nizu ako je: $a_k = 105$, $k = 16$, $S_k = 840$.

Rezultat: $a_1 = 0$, $d = 7$.

11.2 Izračunati k i S_k u aritmetičkom nizu ako je: $a_1 = 4$, $d = 5$, $a_k = 49$.

Rezultat: $k = 10$, $S_{10} = 265$.

11.3 Četvrti član aritmetičke progresije je 9, a deveti član je -6. Koliko članova ovog niza treba sabrati da bi se dobio zbir 54?

Rezultat: $k_1 = 4$ ili $k_2 = 9$.

11.4 Zbir prva četiri člana aritmetičke progresije je 1, a zbir sledeća četiri je 25. Odrediti zbir prvih 37 članova te progresije.

Rezultat: $S_{37} = 925$.

11.5 Pri deljeju devetog i drugog člana aritmetičke progresije dobija se količnik 5, a pri deljenju trinaestog člana sa šestim članom, iste progresije, dobija se količnik 2 i ostatak 5. Naći prvi član i razliku ove progresije.

Rezultat: $a_1 = 3$, $d = 4$.

11.6 Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana tog niza je 482. Odrediti taj niz.

Rezultat: $7, 12, 17, 22, \ldots$ ili $17, 12, 2, -3, -8, \ldots$

11.7 Zbir prva četiri člana aritmetičkog niza je 26, a proizvod istih članova je 880. Odrediti taj niz.

Rezultat: Postoje četiri niza koja zadovoljavaju uslove zadatka i to su:

1. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$

2. $11, 8, 5, 2, -1, \ldots$

3. $\frac{13-\sqrt{1609}}{2}, \frac{39-\sqrt{1609}}{6}, \frac{39+\sqrt{1609}}{6}, \frac{13+\sqrt{1609}}{2}, \ldots$

4. $\frac{13+\sqrt{1609}}{2}, \frac{39+\sqrt{1609}}{6} \frac{39-\sqrt{1609}}{6}, \frac{13-\sqrt{1609}}{2}, \ldots$

11.8 Koliko članova treba umetnuti između brojeva 0 i 12 da bi se dobio aritmetčki niz čiji je zbir (zajedno sa tim brojevima) 150?

Rezultat: Potrebno je umetnuti 23 člana.

11.9 Između brojeva 1 i 31 interpolirati onoliko brojeva koliko je potrebno da bi zajedno sa brojevima 1 i 31 obrazovali aritmetički niz i da je zbir umetnutih brojeva bude četiri puta veći od zbira dva među njima najveća broja.

Rezultat: Potrebno je interpolirati 14 članova.

11.10 Uglovi trougla čine aritmetičku progresiju. Izračunati ih ako zbir njihovih sinusa iznosi $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Rezultat: Uglovi trougla su 30°, 60°, 90°.

11.11 Naći stranice trougla ako se zna da one obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom $d = 4$ i da je jedan ugao trougla 120°.

Rezultat: Tražene stranice trougla imaju dužinu $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_3 = 14$.

11.1.2 Geometrijska progresija

Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ ili n-torka brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naziva se *geometrijska progresija* ako je količnik svaka dva uzastopna člana (počevši od drugog člana) stalan, tj. ako postoji broj q takav da je

$$q = \frac{a_k}{a_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots),$$

odnosno

$$q = \frac{a_k}{a_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n; \quad n \in \mathbb{N}).$$

Pri tome se a_1 naziva *prvi član* posmatrane progresije, član a_k sa neodređenim indeksom k (k-ti član) se naziva *opšti član* te iste progresije, a broj q se naziva *količnik* posmatrane progresije.

Prvi član, količnik i opšti član geometrijske progresije povezani su formulom

$$a_k = a_1 q^{k-1} \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Zbir S_k prvih k članova geometrijske progresije nalazi se po obrascu

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{a_1(1-q^k)}{1-q} \qquad (|q|<1; \quad k=1,2,3,\ldots), \\ S_k &= \frac{a_1(q^k-1)}{q-1} \qquad (|q|>1; \quad k=1,2,3,\ldots). \end{aligned}$$

Ako je progresija beskonačna i $|q| < 1$, zbir S svih njenih članova izračunava se po obrascu

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ako je r $(r \in \mathbb{N})$ broj članova koji treba interpolirati između dva data broja a i b tako da čine geometrisku progresiju, tada važi:

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Za opšti član, takođe, važi

$$a_k = \sqrt{a_{k+m} \cdot a_{k-m}} \qquad (k,m = 1,2,3,\ldots; \quad m < k).$$

i za broj a_k kažemo da je *geometrijska sredina* brojeva a_{k+m} i a_{k-m}.

Zadaci

11.12 Ako je za geometrijski niz poznato da je $q = 2$ i $S_7 = 625$ izračunati a_1 i a_7.

Rezultat: $a_1 = 5$, $a_7 = 320$.

11.13 U geometrijskom nizu je $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$ i $S_n = 40$. Izračunati a_1, q, n.

Rezultat: $a_1 = 1$, $q = 3$, $n = 4$.

11.14 Naći četiri broja koja čine geometrijsku progresiju kod kojih je zbir prvog i četvrtog člana jednak -49, a zbir drugog i trećeg člana jednak 14.

Rezultat: $-56,\ 28,\ -14,\ 7 \quad \text{ili} \quad 7,\ -14,\ 28,\ -56.$

11.15 U geometrijskoj progresiji srednji član je jednak 12. Zbir prvog i poslednjeg člana je 51, a zbir svih članova iznosi 93. Koliko članova ima progresija?

Rezultat: $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48 \quad \text{ili} \quad 48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3.$

11.16 Tri broja čiji je zbir 26, obrazuju geometrijski niz. Ako se tim brojevima dodaju tim redom 1, 6 i 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Naći te brojeve.

Rezultat: 2, 6 i 18 ili 18, 6, 2.

11.17 Četiri broja čine aritmetički niz. Ako se od svakog broja tim redom oduzme 2, 7, 9 i 5, dobijeni brojevi obrazuju geometrijski niz. Odrediti te brojeve.

Rezultat: 5, 13, 21, 29.

11.18 Tri broja čiji je zbir 93, čine geometrijski niz. Isti brojevi se mogu uzeti za prvi, drugi i sedmi član aritmetičkog niza. Naći te brojeve.

Rezultat: 3, 15 i 75 ili 31, 31 i 31.

11.19 Naći četiri broja, od kojih prva tri čine geometrijski, a poslednja tri aritmetički niz i ako je zbir prvog i četvrtog broja 14, a drugog i trećeg broja 12.

Rezultat: 2, 4, 8, 12 ili $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}.$

11.20 Između brojeva 4 i 1024 umetnuti tri broja tako da svi zajedno čine geometrijski niz.

Rezultat: 16, 64, 256.

11.21 Naći zbir $B_{n+1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$.

Rezultat: $B_{n+1} = -\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2} + \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1}.$

11.22 Zbir beskonačne geometrijsku progresije sa količnikom q $(|q| < 1)$ iznosi 16, a zbir kvadrata te iste progresije je 153,6. Nać četvrti član i količnik te progresije.

Rezultat: $a_4 = \frac{3}{16}.$

11.2 Binomna formula

Stepenovanje binoma $a+b$, gde su a, b proizvoljni brojevi dovodi do binomne formule, koja za proizvoljnu vrednost prirodnog broja n glasi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

ili u skraćenom obliku

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Ako se umesto b stavi $-b$ dobijamo

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Podsećamo da je $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ i $\binom{n}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Zadaci

11.23 Pomoću binomne formule izračunati:

a) $(a-2b)^5$; b) $(2+i)^6$; c) $(2-i)^6$.

Rezultat: a) $a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$;

b) $-177+44i$; c) $-177-44i$.

11.24 Odrediti x u izrazu $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ako je treći član razvoja 240.

Rezultat: $x=2$.

11.25 U razvoju binoma $\left(x\sqrt[4]{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ binomni koeficijenti petog i desetog člana su jednaki. Odrediti onaj član razvoja koji ne sadrži x.

Rezultat: $k=7$, pa je traženi član $\binom{13}{7} = 1716$.

11.26 Naći peti član razvoja binoma $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ako je odnos koeficijenata trećeg i drugog člana jednak $\frac{7}{2}$.

Rezultat: Peti član razvoja binoma jednak je 70.

11.27

a) Naći sve racionalne članove u razvoju binoma $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{12}$, gde je x racionalni broj.

b) Koliko ima racionalnih članova binoma $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124}$?

Rezultat:

a) Racionalni članovi razvoja su x^6, $\binom{12}{6}x^{-1}$, x^4.

b) Racionalnih sabiraka u binomnom razvoju ima 32.

11.28 Naći koeficijent uz x^4 u izrazu $(1+x)^4 + (1+x)^5 + \cdots + (1+x)^{15}$.

Rezultat: Koeficijent uz x^4 je $\binom{16}{5} = 4368$.

Glava 12

Planimetrija

Trougao:

Površina trougla:

a) $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, gde su a, b, c stranice trougla, a h_a, h_b, h_c odgovarajuće visine;

b) $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, gde su α, β, γ unutrašnji uglovi, a a, b, c naspramne stranice, respektivno;

c) Heronov obrazac: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gde je $s = \frac{a+b+c}{2}$;

d) $P = r \cdot s$, gde je r poluprečnik upisanog kruga;

e) $P = \frac{abc}{4R}$, gde je R poluprečnik opisanog kruga;

Obim trougla: $O = a + b + c$.

Specijalno, za *pravougli trougao* važi *Pitagorina teorema* $c^2 = a^2 + b^2$. Površina pravouglog trougla je $P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$, gde su a i b katete, a c hipotenuza. Poluprečnik opisanog kruga je $R = \frac{c}{2} = t_c$, gde je t_c težišna duž koja polazi iz temena pravog ugla, a visina nad hipotenuzom $h_c^2 = p \cdot q$, pri čemu su p i q projekcije kateta na hipotenuzu.

Za *jednakostranični trougao* površina je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, visina $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, a za poluprečnike R i r opisanog i upisanog kruga važi $R = 2 \cdot r = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Obim jednakostraničnog trougla je $O = 3 \cdot a$.

Paralelogram: Površina paralelograma računa se po formuli $P = ah_a = bh_b$, gde su a i b stranice paralelograma, a h_a i h_b odgovarajuće visine ili $P = ab \sin\alpha$, gde je α ugao zahvaćen stranicama a i b. Obim paralelograma je $O = 2(a+b)$.

Kvadrat: Površina kvadrata je $P = a^2$, obim $O = 4a$, dijagonala kvadrata je $d = a\sqrt{2}$, a poluprečnici upisanog i opisanog kruga su, redom, $r = \frac{a}{2}$ i $R = \frac{d}{2}$.

Pravougaonik: Površina pravougaonika je $P = a \cdot b$, obim $O = 2(a+b)$, dijagonala je $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, poluprečnik opisanog kruga $R = \frac{d}{2}$.

Romb: Površina romba je $P = a \cdot h = \frac{d_1 d_2}{2}$, gde su d_1 i d_2 dijagonale romba. Obim romba je $O = 4a$. Poluprečnik upisanog kruga je $r = \frac{h}{2}$, a dužina stranice može se izračunati prema formuli $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$.

Trapez: Površina trapeza je $P = \frac{a+b}{2}h$, gde su a i b osnovice, a h visina trapeza. Srednja linija trapeza je $m = \frac{a+b}{2}$. Obim je $O = a + b + c + d$, gde su c i d kraci trapeza.

Deltoid: Površina deltoida je $P = \frac{d_1 d_2}{2}$, gde su d_1 i d_2 dijagonale deltoida.

Tetivni četvorougao: Potreban i dovoljan uslov da oko četvorougla može da se opiše kružnica jeste da njegovi suprotni uglovi budu suplementni tj. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Površina tetivnog četvorougla je
$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, gde je $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Tangentni četvorougao: Potreban i dovoljan uslov da u četvorougao može da se upiše kružnica jeste da zbirovi njegovih suprotnih stranica budu jednaki tj. $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Površina tangentnog četvorougla je $P = r \cdot s$, gde je $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, a r poluprečnik upisanog kruga.

Pravilan šestougao: Površina pravilnog šestougla je $P = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, obim $O = 6 \cdot a$, veća dijagonala je $D = 2 \cdot a$, manja dijagonala $d = a\sqrt{3}$, a poluprečnici opisanog i uisanog kruga, redom, su $R = a$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Krug: Obima kruga poluprečnika r je $O = 2r\pi$, a površina $P = r^2\pi$. Dužina kružnog luka sa centralnim uglom α je $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$. Površina kružnog isečka sa centralnim uglom α je $P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{r\cdot l}{2}$. Površina kružnog odsečka sa centralnim uglom α je $P_o = P_i - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$. Periferijski ugao u krugu jednak je polovini centralnog ugla nad istim lukom.

Zbir unutrašnjih uglova *n-tougla* je $S_n = (n-2)\pi$, a broj dijagonala je $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Zadaci

12.1 Izračunati obim i površinu pravouglog trougla ako je težišna duž koja odgovara hipotenuzi $t_c = 5\,\text{cm}$, a sa hipotenuzom zaklapa ugao od 60°.

Rezultat: $O = 5(\sqrt{3}+3)\,\text{cm}$ i $P = \frac{25\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$.

12.2 Izračunati obim i površinu pravougaonika $ABCD$ čija je dijagonala $AC = 6\,\text{cm}$ i ugao $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Rezultat: $O = 6(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}$ i $P = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

12.3 Stranica romba je $8\,\text{cm}$, a oštar ugao 60°. Izračunati obe dijagonale i površinu tog romba.

Rezultat: $d_1 = 8\,\text{cm}$, $d_2 = 8\sqrt{3}\,\text{cm}$ i $P = 32\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

12.4 Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla ABC $(AC = BC)$ je 30°, a krak $10\,\text{cm}$. Izračunati površinu tog trougla.

Rezultat: $P = 25\ cm^2$.

12.5 Pravilni šestougao i pravilni trougao imaju iste obime koji iznose $18\,\text{cm}$. Koji je odnos površina tog šestougla i tog trougla?

Rezultat: 3:2.

12.6 Površina kvadrata jednaka je površini pravouglog trougla kateta $p = 8\,\text{cm}$ i $q = 9\,\text{cm}$. Izračunati obim tog kvadrata.

Rezultat: $O = 24\ cm$.

12.7 Koliko stranica i dijagonala ima mnogougao čiji je svaki spoljašnji ugao 40°.

Rezultat: $n = 9$ i $D_9 = 27$.

12.8 U romb osnovice 8 cm i visine 4 cm upisan je krug. Za koliko je obim romba veći od obima kruga? Za koliko je površina kruga manja od površine romba? ($\pi \approx 3,14$)

Rezultat: 19,44 cm i 19,44 cm^2.

12.9 Koliku površinu opisuje konac klatna dužine 1,2 m ako pri kretanju njegov vrh opisuje luk dužine 30 cm.

Rezultat: 0,18 cm^2.

12.10 Izračunati površinu jednakokrakog trougla osnovice 30 cm i poluprečnika upisane kružnice $r = 10$ cm.

Rezultat: $P = 540\,cm^2$.

12.11 Izračunati površinu jednakokrakog trougla, ako je visina koja odgovara osnovici 20 cm, a visina kraka 24 cm.

Rezultat: $P = 300\,cm^2$.

12.12 U trouglu upisan je krug poluprečnika $r = 4$ cm. Jedna stranica dodirnom tačkom podeljena je na odsečke dužine 6 cm i 8 cm. Izračunati druge dve stranice i površinu trougla.

Rezultat: Tražene stranice su 13 cm i 15 cm, a površina $P = 84\,\text{cm}^2$.

12.13 Stranice trougla su 13 cm, 14 cm i 15 cm. Prava paralelna najvećoj stranici trougla odseca trapez obima 39 cm. Izračunati površinu trapeza.

Rezultat: $P = 78{,}75\,\text{cm}^2$.

12.14 Izračunati površinu i katete pravouglog trougla u kome dodirna tačka upisane kružnice na hipotenuzi deli hipotenuzu na odsečke od 3 cm i 10 cm.

Rezultat: Katete su 5 cm i 12 cm, a površina $P = 30\,\text{cm}^2$.

12.15 Površina romba je 1 dm^2, a oštar ugao 30°. Izračunati dijagonale romba.

Rezultat: $d_1 = 10(\sqrt{3} + 1)\,\text{dm}$, $d_2 = 10(\sqrt{3} - 1)\,\text{dm}$.

12.16 Trapez osnovica 20 cm i 12 cm i visine 8 cm razložiti na dva dela jednake površine pravom koja je paralelna sa osnovicama. Koliko je ova prava udaljena od veće osnovice?

Rezultat: Traženo rastojanje je $4(5-\sqrt{17})\,\text{cm}$.

12.17 Oko trougla sa stranicama 13 cm, 14 cm i 15 cm je opisan krug k. Izračunati deo površine kruga k, koji ostaje kada se iz njega izreže upisani krug datog trougla.

Rezultat: $P = \frac{3201}{64}\pi\,\text{cm}^2$.

12.18 Tačke M i N su središta dveju naspramnih stranica kvadrata. Koliki deo površine kvadrata leži u krugu poluprečnika MN (Uzeti da je $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\pi \approx 3{,}14$)

Rezultat: 95,6.

12.19 Teme A jednakostraničnog trougla ABC je centar kruga koji dodiruje stranicu BC. Koliki procenat površine trougla ostaje van trougla?

Rezultat: 7.

12.20 Stranice trougla ABC su $AB = 78\,\text{cm}$, $BC = 50\,\text{cm}$ i $AC = 80\,\text{cm}$. Tačka M je središte stranice AB i duž CN je visina. Izračunati površinu kruga opisanog oko trougla CMN.

Rezultat: $P = \frac{2929}{4}\pi\,\text{cm}^2$.

12.21 U kružni odsečak, koji odgovara centralnom uglu $\alpha = 120°$, upisan je kvadrat. Odrediti površinu kvadrata, ako je poluprečnik kruga $r = (2 + \sqrt{19})\,\text{cm}$.

Rezultat: $P = 9\,\text{cm}^2$.

Glava 13

Stereometrija

Prizma: Površina prizme jednaka je zbiru površina dveju osnova i omotača, tj. $P = 2B + M$. Zapremina prizme jednaka je proizvodu površine osnove i visine, tj. $V = B \cdot H$. Prizma čije su osnove paralelogrami naziva se *paralelopiped*. Prava prizma čije su osnove pravougaonici naziva se *pravougli paralelopiped* ili *kvadar*, a ako su pritom i sve ivice jednake, onda je *kocka* ili *pravilan heksaedar*. Površina kvadra čije su ivice a, b, c je $P = 2(ab + bc + ca)$, njegova zapremina je $V = abc$, a dijagonala kvadra $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Površina kocke stranice a je $P = 6a^2$, zapremina je $V = a^3$, dok je dijagonala kocke $D = a\sqrt{3}$.

Piramida: Površina piramide jednaka je zbiru površina osnove i omotača, tj. $P = B + M$. Zapremina piramide je $V = \frac{B \cdot H}{3}$, gde je H visina piramide. *Tetraedar* je kraći naziv za trostranu piramidu, a *pravilan tetraedar* je tetraedar ograničen sa četiri jednakostranična trougla.

Zarubljena piramida: Površina zarubljene piramide je $P = B_1 + B_2 + M$, pri čemu su B_1 i B_2 površine osnova, a M površina omotača zarubljene piramide. Zapremina zarubljene piramide je $V = \frac{H}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$, gde je H visina zarubljene piramide.

Prav valjak: Površina osnove valjka je $B = r^2\pi$, gde je r poluprečnik osnove. Površina omotača valjka je $M = 2r\pi H$, gde je H visina. Površina valjka je $P = 2B + M = 2r\pi(r + H)$, a njegova zapremina je $V = B \cdot H = r^2\pi H$. Valjak je jednakostraničan ako je $H = 2r$.

Prava kupa: Površina osnove kupe je $B = r^2\pi$, gde je r poluprečnik osnove kupe, a površina omotača je $M = r\pi s$, gde je s izvodnica kupe. Površina kupe je $P = B + M = r\pi(r + s)$, a zapremina je $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{r^2\pi H}{3}$, gde je H visina kupe. Kupa je jednakostranična ako je $s = 2r$.

Prava zarubljena kupa: Površina omotača zarubljene kupe je $M = \pi s(r + R)$, gde je s izvodnica, a r i R poluprečnici osnova. Površina zarubljene kupe je $P = B_1 + B_2 + M = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r))$, a njena zapremina je $V = \frac{H}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}) = \frac{H\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, gde je H visina zarubljene kupe.

Lopta i delovi lopte: Površina lopte poluprečnika r je $P = 4r^2\pi$, a njena zapremina je $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Ako loptu preseca proizvoljna ravan, deo lopte sa jedne strane ravni naziva se *loptin odsečak*, a deo sferne površi koji mu pripada naziva se još i *kapica* ili *kalota*. Površina kalote (kapice) je $P_k = 2r\pi h$, gde je h visina kalote, a zapremina loptinog odsečka je $V_o = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Ako se lopta preseče dvema paralelnim ravnima, deo lopte između ravni naziva se *loptin sloj*, a odgovarajući deo sferne površi *loptin pojas*. Ako je h visina sloja, a r_1 i r_2 poluprečnici presečnih krugova, površina pojasa iznosi $P_p = 2r\pi h$, zapremina loptinog sloja $V_s = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

Zadaci

13.1 Osnova prave trostrane prizme je pravougli trougao čija je kateta 12 cm i hipotenuza 13 cm. Ako je visina prizme dvostruko veća od dužine druge katete, izračunati zapreminu te prizme.

Rezultat: $V = 300\,\mathrm{cm}^3$.

13.2 Ivice kvadra su tri uzasopna prirodna broja. Odrediti površinu tog kvadra ako je njegov dijagonalni presek kvadrat.

Rezultat: 94.

13.3 Površina dijagonalnog preseka kocke je $36\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$. Izračunati zapreminu te kocke.

Rezultat: $216\,\mathrm{cm}^3$.

13.4 Dijagonala kvadra dužine $10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ zaklapa sa ravni osnove ugao od 60°. Izračunati zapreminu tog kvadra ako je jedna osnovna ivica 5 cm.

Rezultat: $375\sqrt{2}\,\text{cm}^2$.

13.5 Dimenzije kvadra su tri uzastopna prirodna broja. Izračunati njegovu površinu i zapreninu, ako je zbir svih njegovih ivica 72 cm.

Rezultat: $P = 214\,\text{cm}^2$ i $V = 210\,\text{cm}^3$.

13.6 Zapremina pravilne četvorostrane prizme je $2592\,\text{cm}^3$. Izračunati površinu te prizme ako je odnos dužina osnovne ivice i visine prizme 2:3.

Rezultat: $1152\,\text{cm}^2$.

13.7 Osnova prave prizme je paralelogram čije su stranice $a = 9\,\text{cm}$ i $b = 10\,\text{cm}$, a jedna dijagonala je $d_1 = 17\,\text{cm}$. Izračunati zapreminu te prizme ako je njena površina $P = 334\,\text{cm}^2$.

Rezultat: $V = 360\,\text{cm}^3$.

13.8 Baza prave prizme je jednakokraki trougao čiji krak ima dužinu 5, visina prizme iznosi 10, a zapremina 120. Izračunati osnovicu a baze i površinu prizme.

Rezultat: $a = 8$ i $P = 204$ ili $a = 6$ i $P = 184$.

13.9 Površina prave trostrane prizme jednaka je $1440\,\text{cm}^2$, a njena visina je 16 cm. Izračunati osnovne ivice prizme ako se one odnose kao $17 : 10 : 9$.

Rezultat: $a = 34\,\text{cm}$, $b = 20\,\text{cm}$, $c = 18\,\text{cm}$.

13.10 Osnovne ivice pravog paralelepipeda su 10 cm i 17 cm, veća dijagonala osnove iznosi 21 cm, a veća dijagonala paralelopipeda je 29 cm. Izračunati površinu paralelopipeda.

Rezultat: $P = 1416\,\text{cm}^2$.

13.11 Osnova pravog paralelepipeda je paralelogram sa stranicama $a = 3\,\text{cm}$ i $b = 8\,\text{cm}$ i uglom između njih $\gamma = 30°$. Odrediti površinu i zapreminu paralelepipeda ako je površina njegovog omotača $M = 220\,\text{cm}^2$.

Rezultat: $P = 244\,\text{cm}^2$, $V = 120\,\text{cm}^3$.

13.12 Površina većeg dijagonalnog preseka pravilne šestostrane prizme iznosi $24\,\text{cm}^2$, a obim 22 cm. Izračunati površinu i zapreminu date šestostrane prizme.

Rezultat: $P = 8(9 + \sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$ i $V = 72\sqrt{3}cm^3$
ili $P = 9(8 + 3\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$ i $V = 27\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

13.13 Osnova prizme je trapez čije su osnovice 24 cm i 10 cm, a kraci 13 cm i 15 cm. Izračunati površinu izapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trapeza.

Rezultat: $P = 1152\,\mathrm{cm}^2$, $V = 2448\,\mathrm{cm}^3$.

13.14 Izračunati površinu pravilne četvorostrane jednakoivične piramide, ako je površina omotača $36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

Rezultat: $36(1 + \sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

13.15 Izračunati zapreminu pravilne šestostrane piramide ako je osnovna ivica 6 cm, a površina jedne bočne strane $18\,\mathrm{cm}^2$.

Rezultat: $V = 54\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

13.16 Nad svakom stranicom jednakostraničnog trougla dužine a, konstruisani su jednakokraki trouglovi dva puta veće površine od površine tog trougla i tako je dobijena mreža pravilne trostrane piramide. Odrediti površinu te piramide u funkciji od a.

Rezultat: $P = \frac{7a^2\sqrt{3}}{4}$.

13.17 Omotač pravilne trostrane piramide, čija bočna ivica ima dužinu 1, čine jednakokrako-pravougli trouglovi. Izračunati zapreminu piramide.

Rezultat: $V = \frac{1}{6}$.

13.18 Osnova piramide je trougao čije su stranice 13 cm, 14 cm i 15 cm. Bočna ivica naspram srednje po veličini osnovne ivice normalna je na ravan osnove i jednaka je 16 cm. Izračunati površinu i zapreminu piramide.

Rezultat: $P = 448\,\mathrm{cm}^2$, $V = 448\,\mathrm{cm}^3$.

13.19 Visina pravilne četvorostrane zarubljene piramide iznosi 3 cm, zapremina $38\,\mathrm{cm}^3$, a površine osnova se odnose kao 4 : 9. Izračuna površinu omotača zarubljene piramide.

Rezultat: $M = 10\sqrt{19}\,\mathrm{cm}^2$.

13.20 Dijagonalni presek pravilne četvorostrane zarubljene piramide je $132\,\mathrm{cm}^2$, bočna ivica je $s = 13\,\mathrm{cm}$, a visina $H = 12\,\mathrm{cm}$. Izračunati zapreminu zarubljene piramide.

Rezultat: $V = 776\,\text{cm}^3$.

13.21 Kocka dijagonale dužine $10\sqrt{3}\,\text{cm}$ upisana je u valjak. Izračunati zapreminu tog valjka.

Rezultat: $V = 500\pi\,\text{cm}^3$.

13.22 Koliko vode ima u cisterni oblika pravog valjka, prečnika 3,6 m i visine 14 m ispunjene vodom do trećine visine. ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

Rezultat: $47{,}52\,\text{m}^3$.

13.23 Dijagonala osnog preseka valjka obrazuje sa osnovom ugao od 30°. Ako je ta dijagonala $12\,\text{cm}$, izračunati površinu i zapreminu tog valjka.

Rezultat: $P = 18\sqrt{3}\pi(\sqrt{3}+2)\,\text{cm}^2$ i $V = 162\pi\,\text{cm}^3$.

13.24 Osni presek prave kupe je jednakokraki pravougli trougao, čija je hipotenuza dužine $8\sqrt{2}\,\text{cm}$. Izračunati zapreminu te kupe.

Rezultat: $V = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^3$.

13.25 Kružni isečak poluprečnika $6\,\text{cm}$ kome odgovara centralni ugao od 180° savijen je u omotač prave kupe. Izračunati površinu te kupe.

Rezultat: $P = 27\pi\,\text{cm}^2$.

13.26 Ako se omotač kupe razvije u ravan dobija se kružni isečak poluprečnika $15\,\text{cm}$, sa centralnim uglom od 120°. Izračunati zapreminu kupe.

Rezultat: $V = \frac{250\pi\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^3$.

13.27 Omotač kupe ima površinu $240\pi\,\text{cm}^2$. Izračunati zapreminu kupe, ako se poluprečnik osnove i visina odnose kao $3:4$.

Rezultat: $V = 768\pi\,\text{cm}^3$.

13.28 Trougao sa stranicama $10\,\text{dm}$, $17\,\text{dm}$, $21\,\text{dm}$ rotira oko najveće stranice. Izračunati površinu i zapreminu dobijenog tela.

Rezultat: $P = 216\pi\,\text{dm}^2$, $V = 448\pi\,\text{dm}^3$.

13.29 Poluprečnici osnova prave zarubljene kupe i njena izvodnica odnose se kao $1:4:5$, a visina zarubljene kupe je $8\,\text{cm}$. Izračunati površinu omotača zarubljene kupe.

Rezultat: $M = 100\pi\,\mathrm{cm}^2$.

13.30 Data je površina zarubljene kupe $P = 216\pi\,\mathrm{dm}^2$. Razlika poluprečnika osnova je $5\,\mathrm{dm}$ i izvodnica je $13\,\mathrm{dm}$. Odrediti zapreminu zarubljene kupe.

Rezultat: $V = 388\pi\,\mathrm{dm}^3$.

13.31 Pravilan šestougao površine $24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ obće se oko jedne stranice. Izračunati zapreminu dobijenog tela.

Rezultat: $V = 288\pi\,\mathrm{cm}^3$.

13.32 Ako je zapremina polulopte $18\pi\,\mathrm{cm}^3$, izračunati njenu površinu.

Rezultat: $P = 27\pi\,\mathrm{cm}^2$.

13.33 Kvadrat i u njemu upisani krug rotiraju oko simetrale stranice kvadrata. U kojoj razmeri se nalaze zapremine tako dobijenih tela?

Rezultat: 2:3.

13.34 Dve paralelne ravni, na međusobnom rastojanju od $3\,\mathrm{dm}$, seku loptu, obe sa iste strane centra, tako da su poluprečnici presečnih krugova $9\,\mathrm{cm}$ i $12\,\mathrm{cm}$. Izračunati poluprečnik lopte.

Rezultat: $r = 15\,\mathrm{cm}$.

13.35 Izračunati površinu loptinog pojasa, ako je poluprečnik lopte $r = 65\,\mathrm{cm}$, a poluprečnici krugova koji ograničavaju loptin pojas iznose $r_1 = 63\,\mathrm{cm}$ i $r_2 = 60\,\mathrm{cm}$.

Rezultat: $P_z = 1170\pi\,\mathrm{cm}^2$ ili $P_z = 5330\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Literatura

[1] V. Bogoslavov, *Zbirka zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995.

[2] V. Bogoslavov, *Zbirka zadataka iz matematike 2*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.

[3] V. Bogoslavov, *Zbirka zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991.

[4] V. Bogoslavov, *Zbirka zadataka iz matematike 4*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995.

[5] Dj. Vukomanović, M. Merkle, D. Georgijević, M. Miličić, A. Zolić, R. Radovanović, Dj. Jovanov, Z. Radosavljević, M. Lazić, Z. Šami, *Zbirka zadataka i testova za polaganje prijemnog ispita iz matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000.

[6] P. Miličić, V. Stojanović, Z. Kadelburg, B. Boričić, *Matematika 1 za prvi razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1999.

[7] S. Ognjanović, Ž. Ivanović, L. Milin, *Matematika 3-zbirka rešenih zadataka za III razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1992.

[8] V. Stojanović, *Matematiskop 3-odabrani zadaci za I razred srednjih škola*, Nauka, Beograd, 1988.

[9] V. Stojanović, N. Ćirić, *Matematiskop 5-zbirka rešenih zadataka za III razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 1999.

[10] M. Žižović, M. Stevanović, D. Djurčić, V. Lazarević, A. Šebeković, N. Damljanović, R. Nikolić, *Zbirka zadataka za prijemni ispit iz matematike*, Tehnički fakultet Čačak, 2005.